ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ - Εαρινό εξάμηνο 2018-19
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #2

Πρόβλημα 1. α) Δείξτε ότι αν τό I είναι ένα πρώτο ιδεώδες τού δακτυλίου $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ τότε τό $X = \mathbb{V}(I) \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ είναι ανάγωγο αλγεβρικό σύνολο. Ειδικότερα, αν $F \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ ανάγωγο πολυώνυμο τότε τό $\mathbb{V}(F) \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ είναι ανάγωγο αλγεβρικό σύνολο. Δείξτε ότι τό παραπάνω δεν ισχύει αν αντί τού $\mathbb{C}$ έχουμε ένα άλλο μή αγεβρικά κλειστό σώμα πχ τό $\mathbb{R}$ ή τό $\mathbb{Z}_p$.
β) Έστω $F \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ ένα μή σταθερό πολυώνυμο και $F = F_1^{r_1} \cdots F_s^{r_s}$ η ανάλυσή του σε ανάγωγα πολυώνυμα. Δείξτε ότι $\mathbb{V}(F) = \mathbb{V}(F_1) \cup \cdots \cup \mathbb{V}(F_s)$ είναι η ανάλυση τού $\mathbb{V}(F)$ σε ανάγωγα αλγεβρικά σύνολα. Δείξτε, επίσης, ότι $\mathrm{Rad}(< F >) =< F_1 \cdots F_s >$.

Πρόβλημα 2. Έστω k άπειρο σώμα.
α) Περιγράψτε τό αλγεβρικό υποσύνολο $\mathbb{V}(< y - x^2, z - x^3 >)$ τού $\mathbb{A}^3_k$.
β) Δείξτε ότι $\mathbb{I}(\mathbb{V}(< y - x^2, z - x^3 >)) =< y - x^2, z - x^3 >$.
γ) Δείξτε ότι τό ιδεώδες $< y - x^2, z - x^3 >$ είναι πρώτο ιδεώδες τού δακτυλίου $K[x, y, z]$. (Υπόδειξη: δείξτε πρώτα ότι αν $\phi : R \to S$ είναι ένας επιμορφισμός δακτυλίων και I ιδεώδες τού R με $\mathrm{Ker}\phi \subseteq I$, τότε τό I είναι πρώτο ιδεώδες αν και μόνον αν τό $\phi(I)$ είναι πρώτο ιδεώδες τού S).
δ) Συμπεράνατε ότι τό αλγεβρικό σύνολο $\mathbb{V}(< y - x^2, z - x^3 >)$ είναι ανάγωγο αλγεβρικό σύνολο.

Πρόβλημα 3. α) Γράψτε τό αλγεβρικό σύνολο $V = \mathbb{V}(< x^3 + x - x^2y - y >)$ ως ένωση ανάγωγων αλγεβρικών υποσυνόλων τού $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$.
β) Γράψτε τό αλγεβρικό σύνολο $V = \mathbb{V}(< x^2 - y^2, x^3 + xy^2 - y^3 - x^2y - x + y >)$ ως ένωση ανάγωγων αλγεβρικών υποσυνόλων τού $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ (Υπόδειξη: $\mathbb{V}(< fg, h >) = \mathbb{V}(< f, h >) \cup \mathbb{V}(< g, h >))$).
γ) Γράψτε τό αλγεβρικό σύνολο $\mathbb{V}(< x^2 + y^2 - 1, x^2 - z^2 - 1 >)$ ως ένωση ανάγωγων αλγεβρικών υποσυνόλων τού $\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$.

Προβλήματα 4-8. Οι ασκησεις 1.4, 1.29, 1.19, 1.22, 1.25 από τό βιβλίο τού W. Fulton.