ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Εαρινό Εξάμηνο 2018-19
Θεόδουλος Γαρεφαλάκης

ΜΕΜ 222 ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 2

Άσκηση 2.1 Έστω ομάδες G, H και ομομορφισμός $\phi : G \longrightarrow H$. Αποδείξτε τα παρακάτω.

α′. Εάν ο ϕ είναι επί και η G είναι αβελιανή τότε και η H είναι αβελιανή.

β′. Εάν ο ϕ είναι ένα-προς-ένα και η H είναι αβελιανή, τότε και η G είναι αβελιανή.

Άσκηση 2.2 Έστω αβελιανή ομάδα G.

α′. Τι συμπέρασμα μπορείτε να βγάλετε για το $n \in \mathbb{N}$, εάν γνωρίζετε ότι υπάρχει επιμορφισμός $\theta : G \longrightarrow \mathbb{S}_n$.

β′. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει μονομορφισμός $\phi : \mathbb{D}_{2n} \longrightarrow G$, για κανένα $n \geq 3$.

Άσκηση 2.3 Βρείτε μία υποομάδα της $\mathbb{S}_4$ η οποία είναι ισόμορφη με την $\mathbb{Z}_8^*$.

Άσκηση 2.4 Έστω $n \geq 3, m \geq 3$ φυσικοί αριθμοί με $(n, m) = 1$.

α′. Δείξτε ότι ο $\varphi(n)$ είναι άρτιος αριθμός.

β′. Αν $a \in \mathbb{Z}$, $(a, nm) = 1$, αποδείξτε ότι $a^{\frac{\varphi(mn)}{2}} \equiv 1 \pmod{nm}$.

γ′. Δείξτε ότι η ομάδα $\mathbb{Z}_{nm}^*$ δεν είναι κυκλική.

Άσκηση 2.5 Δείξτε ότι η ομάδα $\mathbb{Z}_{15}^*$ δεν είναι κυκλική και στη συνέχεια δείξτε ότι $\mathbb{Z}_{15}^* = \langle \overline{7}, \overline{11} \rangle$.
Υπόδειξη: Δείξτε ότι $\{\overline{7}^i \cdot \overline{11}^j \ : \ 0 \leq i \leq 3, \ 0 \leq j \leq 1\} = \mathbb{Z}_{15}^*$. Αργότερα στο μάθημα θα δούμε ένα μεθοδικό τρόπο για να βρίσκουμε τέτοιους γεννήτορες.

Άσκηση 2.6 Δείξτε ότι η $\mathbb{S}_n$ παράγεται από τις αντιμεταθέσεις, δηλαδή $\mathbb{S}_n = \langle \{(i\ j) \ : \ 1 \leq i < j \leq n\} \rangle$.

Άσκηση 2.7 Έστω G ομάδα και $S \subseteq G$. Δείξτε ότι το $S \leq G$ αν και μόνο αν $S = \langle S \rangle$.

Άσκηση 2.8 Έστω G_1, G_2 ομάδες. Αποδείξτε τις παρακάτω προτάσεις.

α′. Η $G_1 \times G_2$ είναι αβελιανή αν και μόνο αν οι G_1 και G_2 είναι αβελιανές.

β′. Εάν η $G_1 \times G_2$ είναι κυκλική τότε οι G_1 και G_2 είναι κυκλικές.