ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ - Εαρινό εξάμηνο 2018-19
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #1

Πρόβλημα 1. Βρείτε τό ριζικό τού ιδεώδους $< x^2y^3 >$ στον δακτύλιο $\mathbb{C}[x,y]$.

Πρόβλημα 2. α) Έστω I, J ιδεώδη δακτυλίου R με $I \subseteq J$. Δείξτε ότι $\mathrm{Rad}(I) \subseteq \mathrm{Rad}(J)$.
β) Βρείτε τό ριζικό τού ιδεώδους $< x^{100},\ y^{57} >$ στον δακτύλιο $\mathbb{C}[x,y]$. (*Υπόδειξη:* Χρήση τού α) σε συνδυασμό με τό ότι τό ιδεώδες $< x, y >$ είναι μέγιστο ιδεώδες τού $\mathbb{C}[x,y]$).
γ) Βρείτε τό ριζικό τού ιδεώδους $< x^3 + y^2 - 1,\ y - 1 >$ στον δακτύλιο $\mathbb{C}[x,y]$.

Πρόβλημα 3. Δείξτε ότι τά παρακάτω υποσύνολα τού $\mathbb{R}^3$ είναι αλγεβρικά:
α) $\{(t, t^2, t^3),\ \ t \in \mathbb{R}\}$.
β) $\{(\sin t, \cos t, 1),\ \ t \in \mathbb{R}\}$.
γ) Μια ευθεία στο $\mathbb{R}^3$.

Πρόβλημα 4. α) Δείξτε ότι τό ακόλουθο υποσύνολο τού $\mathbb{C}^2$ δεν είναι αλγεβρικό: $\{(z,w) \in \mathbb{C}^2, |z|^2 + |w|^2 = 1\}$.
β) Δείξτε ότι τό ακόλουθο υποσύνολο τού $\mathbb{R}^2$ δεν είναι αλγεβρικό: $\{(x,y),\ \ x \geq 0\}$.
γ) Δείξτε ότι τό ακόλουθο υποσύνολο τού $\mathbb{R}^2$ δεν είναι αλγεβρικό: $\{(\cos t, \sin t, t),\ \ t \in \mathbb{R}\}$.

Πρόβλημα 5. Βρείτε δύο αλγεβρικά υποσύνολα V, W τού $\mathbb{C}^n$ τών οποίων η διαφορά $V \backslash W = \{v \in V,\ \ v \notin W\}$ να μήν είναι αλγεβρικό.

Πρόβλημα 6. Έστω $X \subset \mathbb{A}^n$, $Y \subset \mathbb{A}^m$ αλγεβρικά σύνολα. Δείξτε ότι τό σύνολο $X \times Y \subset \mathbb{A}^{n+m}$ είναι αλγεβρικό.

Πρόβλημα 7. α) Έστω V αλγεβρικό υποσύνολο τού $\mathbb{C}^n$ και P σημείο που δεν ανήκει στο V. Δείξτε ότι υπάρχει πολυώνυμο $F(x_1, \ldots, x_n)$ με $F(Q) = 0$, για κάθε $Q \in V$, αλλά $F(P) \neq 0$. (Υπόδειξη: Δείξτε ότι $\mathbb{I}(V \cup \{P\}) \neq \mathbb{I}(V)$).
β) Έστω $S = \{P_1, \ldots, P_r\}$ πεπερασμένο υποσύνολο τού $\mathbb{C}^2$ και Q σημείο τού $\mathbb{C}^2$ με $Q \notin S$. Δείξτε ότι υπάρχει πολυώνυμο $F \in \mathbb{C}[x,y]$ με $F(P_i) = 0$ για κάθε $P_i \in S$ και $F(Q) = 1$.
γ) Βρείτε αντιπαράδειγμα για τόν παραπάνω ισχυρισμό στην περίπτωση που τό S είναι άπειρο υποσύνολο τού $\mathbb{C}^2$.

Πρόβλημα 8. α) Δείξτε ότι τό υποσύνολο $\Delta = \{(x,x),\ \ x \in \mathbb{A}^1\} \subset \mathbb{A}^2$ είναι κλειστό υποσύνολο τής τοπολογίας Zariski τού $\mathbb{A}^2$.
β) Δείξτε ότι η τοπολογία Zariski τού $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$ δεν είναι η ίδια με τήν αντίστοιχη τοπολογία γινόμενο (δηλ. την τοπολογία που έχει ως ανοικτά ενώσεις συνόλων τής μορφής $U \times V$, όπου U, V ανοικτά τού $\mathbb{A}^1$ ως προς την τοπολογία Zariski).