ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Χειμερινό Εξάμηνο 2018

Καθηγητής Ν.Γ. Τζανάκης

Άσκηση για τα εργαστήρια Πέμπτης 20 και Παρασκευής 21 Δεκεμβρίου

1. Στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^2$ δείξτε ότι τα σύνολα $\mathcal{B} = \{(2,1),(3,2)\}$ και $C = \{(7,2),(3,1)\}$ είναι βάσεις. Μετά υπολογίστε τον πίνακα μετάβασης από τη $\mathcal{B}$ στη C, καθώς και τον πίνακα μετάβασης από τη C στη $\mathcal{B}$. Τέλος, αν το $u \in \mathbb{R}^2$ έχει συντεταγμένες (λ_1, λ_2) ως προς τη βάση $\mathcal{B}$, ποιες είναι οι συντεταγμένες του u ως προς τη βάση C;

2. (α΄) Δείξτε ότι το σύνολο $\mathcal{B} = \{(\sqrt{3}, -1), (1, \sqrt{3})\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^2$.
(β΄) Υπενθυμίζεται ότι, στον $\mathbb{R}^2$, ο πίνακας στροφής κατά γωνία θ είναι
$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$
Έστω $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ η γραμμική απεικόνιση «στροφή κατά γωνία θ». Θεωρήστε τη γραμμική απεικόνιση L στην περίπτωση που $\theta = \pi/6$ (30 μοίρες) και υπολογίστε τους πίνακες ${}_{\mathcal{B}}L_{\mathcal{B}}$ και ${}_{\mathcal{B}}(L^{-1})_{\mathcal{B}}$. Αν οι συντεταγμένες του διανύσματος $u \in \mathbb{R}^2$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ είναι (λ_1, λ_2) και στρέψομε το u κατά γωνία $\pi/6$, ποιες θα είναι οι συντεταγμένες, ως προς τη βάση $\mathcal{B}$, του διανύσματος που θα προκύψει από τη στροφή του u;

3. Υπενθύμιση συμβολισμού. Αν $n \geq 1$ είναι ακέραιος, συμβολίζομε με $\mathbb{P}_n$ τον διανυσματικό χώρο των πραγματικών πολυωνύμων μεταβλητής X και βαθμού $\leq n$. Θεωρήστε γνωστό ότι $\dim \mathbb{P}_n = n + 1$.
(α΄) Αποδείξτε ότι το σύνολο
$$\mathcal{B} = \{p_1 = X^3,\ p_2 = (X+1)^2,\ p_3 = X + 2,\ p_4 = 3\}$$
είναι βάση του $\mathbb{P}_3$ και το σύνολο
$$C = \{q_1 = (X-1)^2,\ q_2 = X - 2,\ q_3 = X - 3\}$$
είναι βάση του $\mathbb{P}_2$.
(β΄) Θεωρήστε την απεικόνιση $D : \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_{n-1}$ που ονομάζεται «τυπική παράγωγος» και ορίζεται
$$D(a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_2X^2 + a_1X + a_0) = na_nX^{n-1} + (n-1)a_{n-1}X^{n-2} + \cdots + 2a_2X + a_1,$$
και παρατηρήστε ότι η D είναι γραμμική απεικόνιση.
Στην περίπτωση $n = 3$ υπολογίστε τον πίνακα ${}_{C}D_{\mathcal{B}}$. Αν $r = ap_1 + bp_2 + cp_3 + dp_4$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$, γράψτε το $D(r)$ ως γραμμικό συνδυασμό των q_1, q_2, q_3.