ΑΛΓΕΒΡΑ Ι, ΑΣΚΗΣΕΙΣ #12

Πρόβλημα 1. Εξετάστε αν η παρακάτω μετάθεση σ είναι άρτια ή περιττή:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 8 & 7 & 9 & 10 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Πρόβλημα 2. Στην ομάδα S_4, θεωρούμε το υποσύνολο $H = \{e,\ (12)(34),\ (13)(24),\ (14)(23)\}$.
α) Δείξτε ότι η H είναι υποομάδα τής S_4 και μάλιστα αβελιανή.
β) Γράψτε τα αριστερά σύμπλοκα τής H στην S_4.

Πρόβλημα 3. Στην ομάδα S_4 βρείτε την κυκλική υποομάδα $H = \langle(1324)\rangle$ και τα αριστερά και δεξιά σύμπλοκα τής H στην S_4.

Πρόβλημα 4. Στην ομάδα $(\mathbb{Z}_{18}, +)$ βρείτε την κυκλική υποομάδα $H = \langle[6]\rangle$ και τα αριστερά (που συμπίπτουν με τα δεξιά) σύμπλοκα τής H στην $\mathbb{Z}_{18}$.

Πρόβλημα 5. Έστω H υποομάδα τής ομάδας μεταθέσεων S_n, $n \geq 2$. Δείξτε ότι ή όλες οι μεταθέσεις τής H είναι άρτιες ή ακριβώς οι μισές από τις μεταθέσεις τής H είναι άρτιες και οι άλλες μισές περιττές.

Πρόβλημα 6. Έστω ομάδα G, τής οποίας η τάξη είναι pq, όπου p, q πρώτοι αριθμοί (όχι κατ΄ ανάγκη διαφορετικοί). Δείξτε ότι κάθε υποομάδα H τής G, με $H \neq G$, είναι κυκλική.

Πρόβλημα 7. Αποδείξτε ότι, αν μία ομάδα G έχει δύο, τουλάχιστον, στοιχεία και οι μόνες υποομάδες της είναι η G και η $\{e\}$, τότε η ομάδα είναι πεπερασμένη και η τάξη της είναι πρώτος αριθμός (*Υπόδειξη:* πάρτε ένα στοιχείο $a \neq e$ τής ομάδας και εξετάστε την κυκλική υποομάδα $< a >$).

Πρόβλημα 8. α) Εστω G ομάδα και H υποομάδα τής G με δείκτη $|G : H| = 2$. Να αποδειχθεί ότι $a^2 \in H$, γιά κάθε $a \in G$.
β) Γενικότερα, έστω G ομάδα και H υποομάδα τής G με δείκτη $|G : H| = m$. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $a \in G$ υπάρχει θετικός ακέραιος $s \leq m$ με $a^s \in H$.

Πρόβλημα 9. Έστω G μια ομάδα με τάξη 49. Δείξτε ότι για κάθε $a \in G$ υπάρχει $b \in G$ με $a = b^5$. Με άλλα λόγια, για κάθε $a \in G$ η εξίσωση $x^5 = a$ έχει λύση στην G. (Υπόδειξη: Θεωρείστε την κυκλική ομάδα $< a >$. Ποιά είνα η τάξη της;).

Πρόβλημα 10. Στην κυκλική ομάδα $\mathbb{U}_n$ τών n-στών ριζών τής μονάδας, βρείτε γιά $n = 328$, τήν τάξη τού στοιχείου $a = e^{\frac{59\pi i}{82}}$ (βεβαιωθείτε πρώτα ότι τό a είναι στοιχείο τής ομάδας $\mathbb{U}_{328}$).

Πρόβλημα 11. Δείξτε ότι κάθε $[a] \in \mathbb{Z}_{17}$, με $[a] \neq [0]$, είναι δύναμη τού $[3]$, δηλ. $[a] = [3]^s$, για κάποιο $s \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

Πρόβλημα 12. Έστω H_1, H_2 υποομάδες μιας ομάδας G.
α) Δείξτε ότι η $H_1 \cap H_2$ είναι υποομάδα τής G.
β) Δείξτε ότι αν $(|H_1|, |H_2|) = 1$, τότε $H_1 \cap H_2 = \{e\}$.