ΑΛΓΕΒΡΑ Ι, ΑΣΚΗΣΕΙΣ #13

Πρόβλημα 1. Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις, εξετάστε άν η απεικόνιση, που δίνεται, είναι ομομορφισμός ομάδων. Στην περίπτωση που είναι ομομορφισμός βρείτε τόν πυρήνα του και τήν εικόνα του.

1. Ὁμάδες $(\mathbb{Z},+),(\mathbb{R},+)$ και $\phi:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{R}$, οριζόμενη από τη σχέση $\phi(n)=-2n$.
2. Ομάδες $(\mathbb{R},+),(\mathbb{Z},+)$ και $\phi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{Z}$, οριζόμενη από τη σχέση $\phi(x)=[x]$ (τό ακέραιο μέρος τού x).
3. Ομάδα $(\mathbb{R}^*,\cdot)$ και $\phi:\mathbb{R}^*\longrightarrow\mathbb{R}^*$, οριζόμενη από τή σχέση $\phi(x)=|x|$.
4. Ομάδα $(G,\star)$ και $\phi:G\longrightarrow G$, οριζόμενη από τη σχέση $\phi(g)=g^{-1}$.
5. Ομάδες $(\mathbb{R},+),(\mathbb{R}^*,\cdot)$ και $\phi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^*$, οριζόμενη από τη σχέση $\phi(x)=e^x$.
6. Ομάδες $(\mathbb{Z}_6,+),(\mathbb{Z}_2,+)$ και $\phi:\mathbb{Z}_6\longrightarrow\mathbb{Z}_2$, οριζόμενη από τη σχέση $\phi([a]_6)=[a]_2$.
7. Ομάδες $(\mathbb{Z}_9,+),(\mathbb{Z}_2,+)$ και $\phi:\mathbb{Z}_9\longrightarrow\mathbb{Z}_2$, οριζόμενη από τη σχέση $\phi([a]_9)=[a]_2$.
8. Ομάδες $(\mathbb{Z}_{20},+),(\mathbb{Z}_{12},+)$ και $\phi:\mathbb{Z}_{20}\longrightarrow\mathbb{Z}_{12}$, οριζόμενη από τη σχέση $\phi([a]_{20})=3[a]_{12}$.
9. Ομάδες $(F,+),(\mathbb{R},+)$, όπου F το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$, και $\phi:F\longrightarrow\mathbb{R}$, οριζόμενη από τη σχέση $\phi(f)=\displaystyle\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x$.

Πρόβλημα 2. Έστω $\phi:G_1\longrightarrow G_2$ ομορφισμός ομάδων. Δείξτε ότι:
α) $\forall a\in G_1$ έχομε $\mathrm{ord}(\phi(a))\mid\mathrm{ord}(a)$.
β) Αν, επιπλέον ο ϕ είναι ισομορφισμός, τότε δείξτε ότι $\mathrm{ord}(\phi(a))=\mathrm{ord}(a)$.

Πρόβλημα 3. Δείξτε ότι τό σύνολο

$$A=\{f_{a,b}:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \text{με } f(x)=ax+b,\ a\in\mathbb{R}^\star, b\in\mathbb{R}\}$$

είναι ομάδα με πράξη τήν σύνθεση τών απεικονίσεων (αυτή λέγεται η ομάδα τών αφφινικών μετασχηματισμών τού $\mathbb{R}$. Ποιό είναι τό αντίστροφο τού στοιχείου $f_{a,b}$; Δείξτε, επίσης, ότι τό υποσύνολο $N=\{f_{1,b}:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \text{με } f(x)=x+b,\ b\in\mathbb{R}\}$ είναι κανονική υποομάδα τής A.