ΑΛΓΕΒΡΑ Ι, ΑΣΚΗΣΕΙΣ #1

Πρόβλημα 1. Ποιό είναι τό αντίστροφο τού στοιχείου [7] στο $\mathbb{Z}_{17}$;

Πρόβλημα 2. **α)** Βρείτε τά αντιστρέψιμα στοιχεία τού δακτυλίου $\mathbb{Z}_7$. Για κάθε ένα από αυτά βρείτε τό αντιστροφό του.
β) Βρείτε τά αντιστρέψιμα στοιχεία τού δακτυλίου $\mathbb{Z}_{24}$. Για κάθε ένα από αυτά βρείτε τό αντιστροφό του.

Πρόβλημα 3. Αν $p \neq 2$ είναι πρώτος αριθμός, γνωρίζουμε ότι τά μή-μηδενικά στοιχεία τού $\mathbb{Z}_p$ είναι αντιστρέψιμα. Βρείτε τό αντίστροφο τού στοιχείου [2] (Υπόδειξη: κάνετε πρώτα μερικά παραδείγματα για συγκεκριμμένες τιμές τού p).

Πρόβλημα 4. α) Βρείτε όλες τις λύσεις τής εξίσωσης $[3]x = [8]$ στο $\mathbb{Z}_{10}$.
β) Βρείτε όλες τις λύσεις τής εξίσωσης $[8]x = [3]$ στο $\mathbb{Z}_{10}$.

Πρόβλημα 5. Δείξτε ότι $10 \mid 109^{2017} + 1$.

Πρόβλημα 6. Έστω ότι $a^s \equiv 1 \bmod m$ και $a^t \equiv 1 \bmod m$. Αν $d =$ μ.κ.δ.(s,t) να δειχθεί ότι $a^d \equiv 1 \bmod m$.

Πρόβλημα 7. **α)** Έστω a ακέραιος αριθμός. Δείξτε ότι τό 4 δεν διαιρεί τό $a^2 - 2$ ούτε τό $a^2 - 3$.
β) Αν γιά τόν ακέραιο a ισχύει ότι $4 | a - 3$, δείξτε ότι δεν υπάρχουν ακέραιοι x, y για τούς οποίους έχουμε $x^2 + y^2 = a$.

Πρόβλημα 8. Για $a, b \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, αποδείξτε ότι: $a^n \mid b^n \Rightarrow a \mid b$.

Πρόβλημα 9. Δείξτε ότι για κάθε φυσικό n έχουμε ότι $n^5 \equiv n \bmod 30$ (Υπόδειξη: αρχίστε με το $n^5 - n$).

Πρόβλημα 10. Αν $n > 2$ ακέραιος, δείξτε ότι υπάρχει πρώτοις p με $n < p < n!$.

Πρόβλημα 11. **α)** Έστω $a, b \in \mathbb{Z}$. Δείξτε ότι:
i) Αν μ.κ.δ.$(a,b) = 1$, τότε μ.κ.δ.$(a+b, a-b) = 1$ ή 2.
ii) Ἀν μ.κ.δ.$(a,b) = 1$, τότε μ.κ.δ.$(a-b, a^2+ab+b^2) = 1$ ή 3.
β) Για κάθε μιά από τις παρακάτω εξισώσεις, βρείτε όλους τούς σχετικά πρώτους φυσικούς x, y που τήν επαληθεύουν (*Υπόδειξη:* Χρησιμοποιήστε το ερώτημα α) και το θεώρημα ανάλυσης σε πρώτους αριθμούς).

1. $x^2 - y^2 = 135$
2. $x^2 - y^2 = 72$
3. $x^3 - y^3 = 721$
4. $x^3 - y^3 = 3087$

Πρόβλημα 12. **α)** Από τήν συνδυαστική γνωρίζουμε ότι τό $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ είναι ένας φυσικός αριθμός. Δείξτε ότι αν p πρώτος αριθμός και $1 \leq i \leq p-1$ τότε $p \mid \binom{p}{i}$.
Υπόδειξη: Έστω $\binom{p}{i} = m \in \mathbb{N}$. Τότε, $p! = i!(p-i)!m$. Τό p διαιρεί το αριστερό μέλος άρα θα πρέπει να διαιρεί και τό δεξί. Δείξτε ότι δεν διαιρεί τό $i!$ και τό $(p-i)!$ άρα θα πρέπει να διαιρεί τό m.
β) Δείξτε ότι αν $[a]$, $[b] \in \mathbb{Z}_p$, όπου p πρώτος αριθμός, τότε $([a]+[b])^p = [a]^p + [b]^p$.
γ) Να δειχθεί ότι αν p πρώτος αριθμός τότε $p \mid 2^p - 2$.