ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Χειμερινό Εξάμηνο 2018

Καθηγητής Ν.Γ. Τζανάκης

Ασκήσεις για το εργαστήριο της Τρίτης 11 Δεκεμβρίου

1. Έστω K-διανυσματικός χώρος V και $S \subseteq T \subseteq V$. Αποδείξτε τα εξής:
(α΄) Αν και το S είναι γραμμικώς εξαρτημένο, τότε και το T είναι γραμμικώς εξαρτημένο.
(β΄) Αν και το T είναι γραμμικώς ανεξάρτητο, τότε και το S είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

2. Στον K-διανυσματικό χώρο K^∞ των ακολουθιών με στοιχεία από το σώμα K θεωρήστε το άπειρο σύνολο $S = \{e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\}$, όπου $e_1 = (1, 0, 0, \ldots)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots)$ και, γενικά, e_n είναι η ακολουθία της οποίας ο n-οστός όρος είναι 1 και όλοι οι υπόλοιποι όροι είναι 0. Για το είξτε ότι το S είναι γραμμικώς ανεξάρτητο αλλά *δεν* παράγει τον χώρο K^∞.

3. Έστω μη μηδενικός K-διανυσματικός χώρος V, με την εξής ιδιότητα: Υπάρχει θετικός ακέραιος m, τέτοιος ώστε, κάθε υποσύνολο του V με πληθάριθμο m είναι γραμμικώς εξαρτημένο. Αποδείξτε ότι ο V έχει βάση με πληθάριθμο $< m$.
Υπόδειξη: Δείτε την Πρόταση 4(α΄) της 11ης εβδομάδας στην ιστοσελίδα του μαθήματος.

4. Έστω $C^0(\mathbb{R})$ ο $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων.
(α΄) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έστω η συνάρτηση $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = x^n$. Αποδείξτε ότι το σύνολο $\{f_n : n = 1, 2, \ldots\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την πρόταση ότι *ένα μια μη μηδενική πολυωνυμική συνάρτηση δεν μπορεί να μηδενίζεται για περισσότερες από τον βαθμό της διαφορετικές τιμές*.
(β΄) Αποδείξτε ότι διανυσματικός χώρος $C^0(\mathbb{R})$ των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων δεν έχει πεπερασμένη βάση.
Υπόδειξη. Απόδειξη με εις άτοπον απαγωγή. Υποθέστε ότι $\mathcal{B}$ είναι πεπερασμένη βάση του $C^0(\mathbb{R})$. Χρησιμοποιείστε το (α΄) σε συνδυασμό με την Πρόταση 4(α΄) της 11ης εβδομάδας στην ιστοσελίδα του μαθήματος.
(γ΄) Αποδείξτε ὅτι διανυσματικός χώρος $C^0(\mathbb{R})$ δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενος.
Υπόδειξη. Απόδειξη με εις άτοπον απαγωγή. Υποθέστε ότι S είναι πεπερασμένο υποσύνολο του $C^0(\mathbb{R})$ τέτοιο ώστε $\langle S \rangle = C^0(\mathbb{R})$. Χρησιμοποιείστε το (β΄) σε συνδυασμό με την Πρόταση 3 της 11ης εβδομάδας στην ιστοσελίδα του μαθήματος.