

ΑΛΓΕΒΡΑ Ι, ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 11

Πρόβλημα 1. Εξετάσατε ποιές από τις παρακάτω ομάδες είναι κυκλικές.

- α) $(\mathbb{R}, +)$.
- β) $(\{+1, -1\}, \cdot)$.
- γ) $(M_2(\mathbb{R}), +)$.

Πρόβλημα 2. Για τις κυκλικές ομάδες \mathbb{Z}_3 και \mathbb{Z}_6 :

- α) Βρείτε τον πίνακα πράξης τους.
- β) Βρείτε όλους τούς γεννήτορες τους.
- γ) Βρείτε την τάξη όλων των στοιχείων τους.

Πρόβλημα 3. Βρείτε την κυκλική υποομάδα της πολλαπλασιαστικής ομάδας $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ των 4×4 αντιστρεψίμων πινάκων, την οποία παράγει (χωριστά) καθένας από τούς παρακάτω πίνακες:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Πρόβλημα 4. Εστω \mathbb{C}^* η πολλαπλασιαστική ομάδα των μη μηδενικών μιγαδικών αριθμών. Βρείτε την τάξη των κυκλικών υποομάδων της \mathbb{C}^* που παράγονται από τα στοιχεία: i , $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $1+i$. Σε κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις βρείτε όλους τούς γεννήτορες των κυκλικών υποομάδων.

Πρόβλημα 5. Βρείτε τό πλήθος των στοιχείων τού συνόλου $\{\sigma \in \mathbb{S}_5 \text{ με } \sigma(3) = 4\}$.

Πρόβλημα 6. Βρείτε τά παρακάτω γινόμενα $\sigma\tau$ μεταθέσεων τού \mathbb{S}_8 :

- α) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 7 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 2 & 3 & 8 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.
- β) $\sigma = (35862)$, $\tau = (58713)$.

Πρόβλημα 7. Στην ομάδα \mathbb{S}_8 βρείτε τις τροχιές της μετάθεσης $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}$. Γράψτε την σ ως γινόμενο ξένων κύκλων.

Πρόβλημα 8. Στην ομάδα \mathbb{S}_8 θεωρούμε την μετάθεση $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 7 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

- α) Βρείτε την αντίστροφη μετάθεση σ^{-1} .
- β) Βρείτε την τάξη $\text{ord}(\sigma)$ της σ .
- γ) Υπολογίστε την μετάθεση σ^{154} και σ^{-154} .

Πρόβλημα 9. Στην ομάδα \mathbb{S}_6 εκφράστε κάθε μία από τις παρακάτω μεταθέσεις ως γινόμενο ξένων κύκλων και βρείτε την τάξη τους:

- α) (13) (23).
- β) (16) (26) (36) (46) (56).
- γ) (12345) (16).

Πρόβλημα 10. Θεωρούμε την ομάδα S_n .

- α) Έστω $s \leq n$. Βρείτε τό αντίστροφο τού στοιχείου $(12 \dots s)$.
- β) Έστω $\tau = (1234)$. Βρείτε τήν τάξη τού στοιχείου τ . Εκφράστε τά τ^2, τ^3 ως γινόμενα ξένων κύκλων.
- γ) Αν τ όπως στο ερώτημα β), βρείτε τήν μετάθεση τ^{347} .
- δ) Ποιά είναι η τάξη τού στοιχείου $\gamma = (12345)(567)$. Βρείτε την μετάθεση γ^{-581} .

Πρόβλημα 11. Έστω G ομάδα και $a, b \in G$ με $ab = ba$. Έστω $\text{ord}(a) = n, \text{ord}(b) = m$.

- α) Δείξτε ότι $\text{ord}(ab) \mid \text{ε.κ.π.}(n, m)$.
- β) Δείξτε ότι αν $(m, n) = 1$ τότε $\text{ord}(ab) = nm$.