ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Χειμερινό Εξάμηνο 2018

Καθηγητής Ν.Γ. Τζανάκης

Ασκήσεις για το εργαστήριο της Τρίτης 4 Δεκεμβρίου

1. Έστω K οποιοδήποτε από τα $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, n θετικός ακέραιος και $K_n[X]$ το σύνολο των πολυωνύμων μεταβλητής X με συντελεστές από το K, βαθμού $\leq n$. Αποδείξτε ότι $K_n[X]$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $K[X]$.

2. Έστω $C^0(\mathbb{R})$ ο $\mathbb{R}$-δ.χ. των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων (μιας μεταβλητής) και $C^1(\mathbb{R})$ το σύνολο των διαφορίσιμων πραγματικών συναρτήσεων. Αποδείξτε ότι το $C^1(\mathbb{R})$ είναι $\mathbb{R}$-διανυσματικός υπόχωρος του $C^0(\mathbb{R})$.

3. Έστω θετικός ακέραιος n, $M_n(\mathbb{R})$ ο $\mathbb{R}$-δ.χ. των $n \times n$ πινάκων πραγματικών αριθμών και $M_n^*(\mathbb{R})$ το υποσύνολο του $M_n(\mathbb{R})$ που αποτελείται από τους αντιστρέψιμους $n \times n$ πίνακες. Αποδείξτε ότι το $M_n^*(\mathbb{R})$ *δεν* είναι διανυσματικός υπόχωρος του $M_n(\mathbb{R})$.

4. Έστω $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \,:\, a, b \in \mathbb{Q}\}$. Αποδείξτε ότι το $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}$ θεωρούμενου ως διανυσματικού χώρου πάνω από το $\mathbb{Q}$ (αυτό το τελευταίο το γράφομε συνοπτικά $\mathbb{Q}$-δ.χ. $\mathbb{R}$).

5. Αναφερόμενοι στην άσκηση 1, αποδείξτε ότι τα “διανύσματα” (πολυώνυμα) $p_1(X) = X + 1$, $p_2(X) = (X - 1)^3$, $p_3(X) = 2X^2 + 1$ του $K_3[X]$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

6. Στον δ.χ. $C^0(\mathbb{R})$ θεωρούμε τα “διανύσματα” (συναρτήσεις) f, g που ορίζονται από τους τύπους $f(x) = 3\cos 2x$, $g(x) = 2\cos^2 x$. Αποδείξτε ότι τα f, g είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

7. Αναφερόμενοι στην άσκηση 4, αποδείξτε ότι τα “διανύσματα” (πραγματικοί αριθμοί) $u = 1 + 3\sqrt{2}$ και $v = 2$ του $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Θα θεωρήσετε δεδομένη την εξής πρόταση: *Ο αριθμός* $\sqrt{2}$ *είναι άρρητος*, δηλαδή, δεν υπάρχει κλάσμα a/b με a, b ακεραίους, τέτοιο ώστε $a/b = \sqrt{2}$.

8. Αναφερόμενοι στην άσκηση 1, αποδείξτε ότι τέσσερα οποιαδήποτε πολυώνυμα του $K_2[X]$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

   Υπόδειξη: Θεωρήστε τέσσερα πολυώνυμα $p_i(X) = a_{i0} + a_{i1}X + a_{i2}X^2$, $i = 1, 2, 3, 4$ και δείξτε ότι μπορείτε να βρείτε γραμμικό συνδυασμό $c_1 p_1(X) + \cdots + c_4 p_4(X)$, με όχι όλα τα c_i μηδενικά, που να δίνει το μηδενικό πολυώνυμο.