

ΑΛΓΕΒΡΑ Ι, ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 10

Πρόβλημα 1. Έστω $F = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ συνάρτηση}\}$ και $F^* = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ συνάρτηση}\}$. Στο F ορίζουμε πράξη τήν πράξη $+$ (αθροισμα συναρτήσεων) και στο F^* τήν πράξη \cdot (γινόμενο συναρτήσεων). Δείξτε ότι $(F, +)$ και (F^*, \cdot) είναι ομάδες. Εν συνεχεία, θεωρήστε τα εξής σύνολα:

$$A = \{f \in F : f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

$$B = \{f \in F : f(1) = 0\}.$$

$$C = \{f \in F : f(0) = 1\}.$$

$$D = \text{το σύνολο των σταθερών μη μηδενικών συναρτήσεων.}$$

Ποιά από τα παραπάνω είναι υποομάδες τής $(F, +)$ και ποιά τής (F^*, \cdot) .

Πρόβλημα 2. α) Έστω G_1, G_2 ομάδες. Δείξτε τότε ότι και τό καρτεσιανό γινόμενο $G_1 \times G_2$ είναι ομάδα.

β) Βρείτε τον πίνακα πράξης τής ομάδας $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Πρόβλημα 3. α) Έστω (G, \star) ομάδα και K, L υποομάδες τής G . Δείξτε ότι $K \cap L$ είναι υποομάδα τής G .

β) Έστω (G, \star) ομάδα και έστω a στοιχείο τής G . Δείξτε ότι το $H_a := \{g \in G, \text{ όπου } a \star g = g \star a\}$ είναι υποομάδα τής G .

Πρόβλημα 4. Έστω (G, \star) μια αβελιανή ομάδα και έστω m ένας ακέραιος αριθμός. Δείξτε ότι το $G_m := \{g \in G, \text{ με } g^m = e\}$, όπου e το ουδέτερο στοιχείο, είναι υποομάδα τής G .

Πρόβλημα 5. α) Έστω (G, \star) αβελιανή ομάδα και A, B υποομάδες τής G . Δείξτε ότι το $A \star B = \{a \star b, a \in A, b \in B\}$ είναι υποομάδα τής G .

Πρόβλημα 6. α) Βρείτε τις τάξεις των στοιχείων $[8], [12], [34]$ στην ομάδα \mathbb{Z}_{40} . β) Βρείτε όλα τά στοιχεία $[a]$ τής ομάδας \mathbb{Z}_{40} που έχουν τάξη 40.

Πρόβλημα 7. Βρείτε τήν τάξη τού στοιχείου $([4]_{10}, [14]_{16})$ στην ομάδα $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{16}$.

Πρόβλημα 8. Έστω (U_n, \cdot) η ομάδα των n -οστών μιγαδικών ριζών τής μονάδος. Βρείτε ποιά κυκλική υποομάδα τής U_n παράγει τό στοιχείο ζ , στίς ακόλουθες περιπτώσεις:

α) $n = 12, \zeta = e^{\frac{5\pi i}{12}},$

β) $n = 6, \zeta = e^{\frac{5\pi i}{3}},$

γ) $n = 12, \zeta = e^{\frac{\pi i}{3}},$

δ) $n = 6, \zeta = e^{\frac{2\pi i}{3}},$

ε) $n = 12, \zeta = e^{\frac{5\pi i}{6}}.$