ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Χειμερινό Εξάμηνο 2018

Καθηγητής Ν.Γ. Τζανάκης

Ασκήσεις για το εργαστήριο της Τρίτης 27 Νοεμβρίου

1. Αν $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, ποιος είναι ο $\operatorname{adj} A$; Υπολογίστε το γινόμενο $A \cdot \operatorname{adj} A$.

2. Αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, υπολογίστε την $\det(A)$ και τον $\operatorname{adj} A$; Υπολογίστε το γινόμενο $A \cdot \operatorname{adj} A$.

3. Έστω 3×3 (άγνωστος) πίνακας A, για τον οποίο γνωρίζομε ότι $\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} -12 & -16 & -5 \\ -2 & -1 & 0 \\ 15 & 20 & 5 \end{pmatrix}$ και $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. Έστω B_1 ο πίνακας που προκύπτει αν στον A η 2η στήλη αντικατασταθεί από τη στήλη $\mathbf{b}^T$ και B_2 ο πίνακας που προκύπτει αν στον A η 2η γραμμή αντικατασταθεί από τη $\mathbf{b}$. Υπολογίστε τις $\det(B_1)$ και $\det(B_2)$ (είναι συγκεκριμένοι αριθμοί).

4. Με χρήση του κανόνα Cramer λύσετε τα μη ομογενή συστήματα, των οποίων οι αντίστοιχοι επαυξημένοι πίνακες είναι

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 11 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 7 \end{array}\right).$$

5. Αποδείξτε ότι

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_1.$$

Έίναι πολύ εύκολο να σχηματίζομε τα παραπάνω έξι γινόμενα του δεξιού μέλους με τον λεγόμενο ‘‘κανόνα του Sarrus’’, ο οποίος περιγράφεται στο παρακάτω διάγραμμα.

$$\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[dr] & a_2 \arrow[dr] & a_3 \arrow[dl] \arrow[dr] & a_1 \arrow[dl] & a_2 \arrow[dl] \\
b_1 & b_2 \arrow[dl] \arrow[dr] & b_3 \arrow[dl] \arrow[dr] & b_1 \arrow[dl] \arrow[dr] & b_2 \\
c_1 & c_2 & c_3 & c_1 & c_2
\end{tikzcd}$$

Επαναλαμβάνομε στα δεξιά τις δύο πρώτες στήλες της ορίζουσας και συνδέομε τα στοιχεία όπως στο διάγραμμα. Βλέπομε, για παράδειγμα, ότι τα a_1, b_2, c_3 συνδέονται με "δεξιά" βέλη, άρα στον υπολογισμό της ορίζουσας θα πάρομε το γινόμενο $+a_1b_2c_3$. Από την άλλη, τα a_1, b_3, c_2 συνδέονται με "αριστερά" βέλη, άρα στον υπολογισμό θα πάρομε το γινόμενο $-a_1b_3c_2$. **Προσοχή! Ο κανόνας του Sarrus ισχύει μόνο για** 3×3 **ορίζουσες.**

Με τον κανόνα του Sarrus υπολογίστε τις ορίζουσες

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

6. Χρησιμοποιώντας ιδιότητες των οριζουσών αποδείξτε ότι

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1)$$

και

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{vmatrix} = (x_4 - x_3)(x_4 - x_2)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1).$$

Σημείωση. Με χρήση της θεωρίας πολυωνύμων πολλών μεταβλητών είναι εύκολο ν' αποδειχθεί ο γενικώτερος τύπος:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

Ορίζουσες αυτής της μορφής λέγονται ορίζουσες Vandermonde.