ΑΛΓΕΒΡΑ Ι, ΑΣΚΗΣΕΙΣ #9

Πρόβλημα 1. Έστω R ακέραια περιοχή και $a, b \in R$. Δείξτε ότι $< a >=< b >$ εαν και μόνον εαν $a = ub$, όπου u αντιστρέψιμο στοιχείο τού R.

Πρόβλημα 2. Δείξτε ότι το ιδεώδες $< x, 2 >$ τού δακτυλίου $\mathbb{Z}[x]$ δεν είναι κύριο ιδεώδες.

Πρόβλημα 3. Έστω $m, n \in \mathbb{Z}$ και έστω $d =$μ.κ.δ.(m, n) και $e =$ε.κ.π.(m, n). Δείξτε ότι $< m > + < n >=< d >$ και $< m > \cap < n >=< e >$.

Πρόβλημα 4. ;Έστω $(G, *)$ ομάδα με $2n$ στοιχεία. Με τήν χρήση τού πίνακα πράξης τής G δείξτε ότι υπάρχει στοιχείο a τής ομάδας, που δεν είναι τό ουδέτερο, με τήν ιδιότητα $a = a^{-1}$.

Πρόβλημα 5. Έστω $(G, \cdot)$ ομάδα και έστω e τό ταυτοτικό της στοιχείο. Αν κάθε στοιχείο $a \in G$ ικανοποιεί την σχέση $a \cdot a = e$ δείξτε ότι η ομάδα G είναι αβελιανή.

Πρόβλημα 6. α) Δείξτε ότι κάθε υποδακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο τού σώματος $\mathbb{Q}$ τών ρητών αριθμών περιέχει τόν δακτύλιο τών ακεραίων.
β) Βρείτε ένα γνήσιο υποδακτύλιο με μοναδιαίο στοιχείο τού σώματος $\mathbb{Q}$ τών ρητών αριθμών που δεν ταυτίζεται με τον δακτύλιο των ακεραίων.
γ) Δείξτε ότι κάθε υπόσωμα τών πραγματικών αριθμών περιέχει τό σώμα τών ρητών αριθμών.

Πρόβλημα 7. Πόσα αντιστρέψιμα στοιχεία περιέχει ο δακτύλιος $\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{20}$;

Πρόβλημα 8. Έστω R δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο 1_R γιά τον οποίο ισχύει ότι κάθε υποδακτύλιός του είναι και ιδεώδες. Δείξτε ότι $R = 0$ ή $R = \mathbb{Z}$ ή $R = \mathbb{Z}_n$ (*Υπόδειξη:* Κάνετε χρήση τού ομομορφισμού δακτυλίων $\phi : \mathbb{Z} \longrightarrow R$ που ορίζεται ως $\phi(m) = m1_R$).

Πρόβλημα 9. Έστω I ιδεώδες ενός δακτυλίου R. Δείξτε ότι το σύνολο $r(I) = \{x \in R,$ με $xa = 0$ γιά κάθε $a \in I\}$ ορίζει ένα ιδεώδες τού R.

Πρόβλημα 10. Αποδείξτε ότι κάθε έτος, δίσεκτο ή μή, έχει μία ημέρα που να είναι ;Τρίτη και 13;. *Υπόδειξη:* Μετρήστε mod7 απο την πρώτη Τρίτη τού έτους.

Πρόβλημα 11. Έστω p πρώτος αριθμός. Δείξτε ότι υπάρχουν $\frac{p(p+1)}{2}$ μονικά ανάγωγα πολυώνυμα στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_p[x]$.

Πρόβλημα 12. Έστω a ακέραιος. Να δειχθεί ότι $a^{33} \equiv a \mathrm{mod}(15)$.

Πρόβλημα 13. Έστω n, m θετικοί ακέραιοι και $d =$μ.κ.δ.(m, n). Δείξτε ότι μ.κ.δ$(a^n - 1, a^m - 1) = a^d - 1$.