

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Χειμερινό Εξάμηνο 2018

Καθηγητής Ν.Γ. Τζανάκης

Ασκήσεις για το εργαστήριο της Πέμπτης 22 Νοεμβρίου

1. Αν A είναι $n \times n$ πίνακας, αποδείξτε ότι $|-A| = (-1)^n|A|$ και, γενικά, $|\lambda \cdot A| = \lambda^n|A|$ για κάθε αριθμό λ .
2. Ένας πίνακας A λέγεται αντισυμμετρικός αν $A^T = -A$. Αποδείξτε ότι κάθε αντισυμμετρικός $n \times n$ πίνακας, με n περιττό, έχει μηδενική ορίζουσα.
3. Υπολογίστε τις ορίζουσες

$$\begin{vmatrix} 101 & 201 & 301 & 401 \\ 102 & 202 & 302 & 402 \\ 103 & 203 & 303 & 403 \\ 104 & 204 & 304 & 404 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & t & t^2 \\ t & 1 & t^2 \\ t^2 & t & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

4. Έστω $n \geq 2$ και ο $n \times n$ πίνακας A με $(A)_{ij} = i \cdot j$. Αποδείξτε ότι $|A| = 0$.
5. Έστω $n \geq 3$ και ο $n \times n$ πίνακας A με $(A)_{ij} = i + j$. Αποδείξτε ότι $|A| = 0$.
6. Έστω 3×3 πίνακας A με $|A| = 6$. Συμβολίζουμε τις γραμμές του A με $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$. Έστω B ο πίνακας με γραμμές $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_1$. Υπολογίστε την ορίζουσα του B .
7. Αν ο $n \times n$ πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, αποδείξτε ότι $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.
8. Έστω ότι οι $n \times n$ πίνακες A, B συνδέονται με τη σχέση $B = M^{-1}AM$, όπου M είναι αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας. Αποδείξτε ότι $|B| = |A|$.
9. Υπολογίστε την παρακάτω ορίζουσα, δίχως να την αναπτύξετε, αλλά μόνο με χρήση ιδιοτήτων των οριζουσών:

$$\begin{vmatrix} 1 + x_1y_1 & 1 + x_1y_2 & 1 + x_1y_3 \\ 1 + x_2y_1 & 1 + x_2y_2 & 1 + x_2y_3 \\ 1 + x_3y_1 & 1 + x_3y_2 & 1 + x_3y_3 \end{vmatrix}$$

10. Υπολογίστε την παρακάτω ορίζουσα, δίχως να την αναπτύξετε, αλλά μετασχηματίζοντάς την σε ορίζουσα τριγωνικού πίνακα:

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$$