ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Χειμερινό Εξάμηνο 2018

Καθηγητής Ν.Γ. Τζανάκης

Ασκήσεις για το εργαστήριο της Τρίτης 20 Νοεμβρίου

1. Αν $\mathbf{u}_1 = (1,0,1), \mathbf{u}_2 = (0,-1,1), \mathbf{u}_3 = (2,1,0)$ και $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ είναι γραμμική απεικόνιση για την οποία $f(\mathbf{u}_1) = (1,2,-1)$, $f(\mathbf{u}_2) = (1,1,1)$, $f(\mathbf{u}_3) = (0,3,2)$, ποιός είανι ο πίνακας της απεικόνισης f (αυτός, δηλαδή, που συμβολίζομε M_f); Ποιος είναι ο τύπος της απεικόνισης f (δηλαδή, $f(x_1,x_2,x_3) = \ldots$);

2. Θεωρήστε τα διανύσματα $\mathbf{u}_1 = (2,5)$, $\mathbf{u}_2 = (1,2)$ του $\mathbb{R}^2$ και τη γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ για την οποία είναι γνωστό ότι $f(\mathbf{u}_1) = (1,1,0)$, $f(\mathbf{u}_2) = (1,0,2)$.

   (α′) Υπολογίστε τον πίνακα $A = M_f$ της απεικόνισης f.

   (β′) Δείξτε ότι η εικόνα της f (δηλαδή ο υπόχωρος $f(\mathbb{R}^3)$, που συμβολίζεται και $\mathrm{Im}(f)$) είναι ένα επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$ (δηλαδή, υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ διαστάσεως 2) και βρείτε δύο διανύσματα $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$, που ορίζουν αυτό το επίπεδο (δηλαδή, δύο διανύσματα που παράγουν τον υπόχωρο $f(\mathbb{R}^3)$).

   Υπόδειξη: Είναι $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(L_A)$ και στη θεωρία μάθαμε ότι $\mathrm{Im}(L_A) = \mathcal{R}(A)$. Βρείτε μια βάση του $\mathcal{R}(A)$.

   (γ′) Δείξτε ότι η f είναι μονομορφισμός, αλλά δεν είναι επιμορφισμός.

   (δ′) Βρείτε ένα διάνυσμα $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ τέτοιο ώστε $f(\mathbf{v}) = (4,-1,10)$.

   (ε′) Έστω $W = \langle (4,-1,10) \rangle$. Υπολογίστε μια βάση του υποχώρου $f^{-1}(W)$. Τί παριστάνει γεωμετρικά ο υπόχωρος αυτός;

   Υπόδειξη. $\mathbf{x} \in f^{-1}(W) \Leftrightarrow f(\mathbf{x}) \in W \Leftrightarrow A\mathbf{x} \in W$. Συνεπώς πρέπει να βρείτε όλα τα $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ με την ιδιότητα $A\mathbf{x} = c \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$. Αυτό θα σας οδηγήσει στην επίλυση ενός ομογενούς γραμμικού συστήματος.

3. (Αυτή η άσκηση είναι από το προηγούμενο 14ο φυλλάδιο.)

   Θεωρήστε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ και τη γραμμική απεικόνιση $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

   (α′) Δείξτε ότι η L_A είναι επιμορφισμός και υπολογίστε διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^3$, τέτοιο ώστε $L_A(v) = (-2,5)$.

   (β′) Υπολογίστε μια βάση για τον πυρήνα της L_A (δηλαδή, για τον υπόχωρο που συμβολίζομε $\ker(L_A)$).

   (γ′) Ο πίνακας A έχει δεξιό ή αριστερό αντίστροφο; Υπολογίστε τον.

   (δ′) Υπολογίστε μια βάση του υποχώρου $L_A^{-1}(W)$, όπου $W = \langle (-2,5) \rangle$.