ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Χειμερινό Εξάμηνο 2018

Καθηγητής Ν.Γ. Τζανάκης

Περιεκτική άσκηση

Λύθηκε υποδειγματικά στο μάθημα της Παρασκευής 16 Νοεμβρίου

Θεωρήστε τα διανύσματα $\mathbf{u}_1 = (1,1,1)$, $\mathbf{u}_2 = (0,1,-1)$, $\mathbf{u}_3 = (1,2,1)$.

(α$'$) Εκφράστε καθένα από τα διανύσματα $\mathbf{e}_i$ $(i = 1,2,3)$ της κανονικής (στάνταρ) βάσης του $\mathbb{R}^3$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$.

Στα παρακάτω ερωτήματα, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ είναι γραμμική απεικόνιση τέτοια ώστε $f(\mathbf{u}_1) = (1,0,1)$, $f(\mathbf{u}_2) = (2,1,3)$, $f(\mathbf{u}_3) = (1,1,2)$.

(β$'$) Υπολογίστε τον πίνακα $A = M_f$ της απεικόνισης f.

Στα παρακάτω ερωτήματα θα χρησιμοποιήσετε αυτό που μάθαμε στη θεωρία, ότι $f = L_{M_f} = L_A$.

(γ$'$) Δείξτε ότι η εικόνα της f (δηλαδή ο υπόχωρος $f(\mathbb{R}^3)$, που συμβολίζεται και $\mathrm{Im}(f)$) είναι ένα επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$ (δηλαδή, υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ διαστάσεως 2) και βρείτε δύο διανύσματα $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$, που ορίζουν αυτό το επίπεδο (δηλαδή, δύο διανύσματα που παράγουν τον υπόχωρο $f(\mathbb{R}^3)$).

Υπόδειξη: Είναι $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(L_A)$ και στη θεωρία μάθαμε ότι $\mathrm{Im}(L_A) = \mathcal{R}(A)$. Βρείτε μια βάση του $\mathcal{R}(A)$.

(δ$'$) Δείξτε ότι ο πυρήνας $\ker(f)$ είναι μια ευθεία στον $\mathbb{R}^3$ (δηλαδή ο υπόχωρος $\ker(f)$ έχει διάσταση 1) και βρείτε ένα διάνυσμα που ορίζει αυτή την ευθεία (δηλαδή, ένα διάνυσμα που παράγει τον υπόχωρο $\ker(f)$).

Υπόδειξη: Είναι $\ker(f) = \ker(L_A)$ και στη θεωρία μάθαμε ότι $\ker(L_A) = \mathcal{N}(A)$. Βρείτε μια βάση του $\mathcal{N}(A)$.

(ε$'$) Βρείτε έναν υπόχωρο V διαστάσεως 2, τέτοιον ώστε $f(V) = f(\mathbb{R}^3)$.

Υπόδειξη. Στο ερώτημα (γ$'$) βρήκατε δύο διανύσματα $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ που παράγουν τον $f(\mathbb{R}^3)$· αρκεί, λοιπόν, να βρείτε δύο διανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ τέτοια ώστε $f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1$ και $f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$ και τότε $V = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$.

(ϛ$'$) Βρείτε ένα διάνυσμα $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ τέτοιο ώστε $f(\mathbf{v}) = (6,-1,5)$.

Υπόδειξη. Γράψτε το $(6,-1,5)$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ και μετά χρησιμοποιείστε τα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ που βρήκατε στο ερώτημα (δ$'$).

(ζ$'$) Έστω $W = \langle (6,-1,5) \rangle$. Υπολογίστε μια βάση του υποχώρου $f^{-1}(W)$. Τί παριστάνει γεωμετρικά ο υπόχωρος αυτός;

Υπόδειξη. $\mathbf{x} \in f^{-1}(W) \Leftrightarrow f(\mathbf{x}) \in W \Leftrightarrow A\mathbf{x} \in W$. Συνεπώς πρέπει να βρείτε όλα τα $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ με την ιδιότητα $A\mathbf{x} = c\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$. Αυτό θα σας οδηγήσει στην επίλυση ενός ομογενούς γραμμικού συστήματος.