ΑΛΓΕΒΡΑ Ι, ΑΣΚΗΣΕΙΣ #8

Πρόβλημα 1. Εξετάστε ποιά από τά παρακάτω υποσύνολα τού δακτυλίου $\mathbb{R}[x]$ είναι ιδεώδη:
α) $A = \{f(x) \in \mathbb{R}[x],\ 5 \mid f(2)\}$,
β) $B = \{f(x) \in \mathbb{R}[x],\ (x-1)^2 \mid f(x)\}$,
γ) $C = \{f(x) \in \mathbb{R}[x],\ f(1) \in \mathbb{Q}\}$.

Πρόβλημα 2. Έστω I ιδεώδες δακτυλίου R με μοναδιαίο στοιχείο 1_R.
α) Δείξτε ότι $1_R \in I$ αν και μόνον αν $I = R$.
β) Έστω $a \in R$ αντιστρέψιμο με $a \in I$. Τότε $I = R$.
γ) Δείξτε ότι τα μόνα ιδεώδη ενός σώματος K είναι το $\{0\}$ και το K.
δ) Έστω K σώμα και S ένας δακτύλιος. Δείξτε ότι κάθε μή μηδενικός ομομορφισμός $\phi : K \to S$ είναι μονομορφισμός.

Πρόβλημα 3. α) Δείξτε ότι αν $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ είναι ομομορφισμός δακτυλίων τότε ή ϕ είναι ο μηδενικός ομομορφισμός (δηλ. $\phi(m) = 0$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$) ή ϕ είναι ο ταυτοτικός (δηλ. $\phi(m) = m$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$). *Υπόδειξη:* εξετάστε τήν τιμή τού $\phi(1)$ και δείξτε ότι θα πρέπει $\phi(1) = 0$ ή 1).
β) Υπάρχει, μη μηδενικός, ομομορφισμός δακτυλίων από τό σώμα $\mathbb{Q}$ τών ρητών στον δακτύλιο $\mathbb{Z}$ τών ακεραίων; *Υπόδειξη:* δείξτε όπως παραπάνω ότι θα πρέπει $\phi(1) = 0$.

Πρόβλημα 4. Είναι ο δακτύλιος $2\mathbb{Z}$ ισόμορφος με τόν δακτύλιο $3\mathbb{Z}$;

Πρόβλημα 5. Έστω R, S δακτύλιοι.
α) Δείξτε ότι οι απεικονίσεις $\pi : R \times S \to R$, με $\pi((r,s)) = r$ και $i : R \to R \times S$ με $i(r) = (r, 0_S)$ είναι ομομορφισμοί δακτυλίων και βρείτε τόν πυρήνα τους.
β) Έστω ότι οι R, S είναι ακέραιες περιοχές. Είναι ο δακτύλιος $R \times S$ ακέραια περιοχή;

Πρόβλημα 6. Θεωρούμε τήν $\phi : \mathbb{Z}_{20} \to \mathbb{Z}_5$ με $\phi([a]_{20}) = [a]_5$.
α) Δείξτε ότι η ϕ είναι καλά ορισμένη απεικόνιση (δηλ. ο ορισμός της δεν εξαρτάται από την επιλογή αντιπροσώπου στην κλάση $[a]_{20}$).
β) Δείξτε ότι η ϕ είναι ομομορφισμός δακτυλίων και βρείτε τόν πυρήνα του και τήν εικόνα του.
γ) Υπάρχει μή μηδενικός ομομορφισμός δακτυλίων $\psi : \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_{20}$;

Πρόβλημα 7. Δείξτε ότι τά $< m >= \{km,\ k \in \mathbb{Z}\}$ είναι τα μόνα ιδεώδη τού δακτυλίου $\mathbb{Z}$. *Υπόδειξη:* Έστω $I \neq \{0\}$ ιδεώδες τού δακτυλίου $\mathbb{Z}$. ι) Δείξτε ότι τό I περιέχει θετικούς ακέραιους και ιι) Έστω m ο ελάχιστος θετικός ακέραιος στο I. Δείξτε ότι κάθε στοιχείο τού I διαιρείται από τόν m.

Πρόβλημα 8. Έστω R δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο 1_R και $\phi : Z \to R$ η απεικόνιση που ορίζεται ως $\phi(m) = m1_R$.
α) Δείξτε ότι η ϕ είναι ο ομομορφισμός δακτυλίων.
β) Δείξτε ότι άν ο R είναι ακέραια περιοχή τότε ή ο ϕ είναι μονομορφισμός ή ο πυρήνας του είναι ιδεώδες τής μορφής $< p >$, όπου p πρώτος αριθμός.

Πρόβλημα 9. Έστω R μεταθετικός δακτύλιος με μομαδιαίο στοιχείο 1_R.
α) Έστω $a, b \in R$ με $a^n = 0_R$ και $b^m = 0_R$, για κάποιος θετικόυς ακεραίους n, m. Δείξτε ότι υπάρχει θετικός ακέραιος s με $(a+b)^s = 0_R$.
β) Ένα στοιχείο τού R λέγεται μηδενοδύναμο αν υπάρχειο θετικός ακεαιος n με $a^n = 0_R$. Δείξτε ότι τό σύνολο των μυδενοδύναμων στοιχείων τού R είναι ιδεώδες του.

Πρόβλημα 10. Έστω p πρώτος. Τότε:
α) Η απεικόνιση $\phi : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}_p[x]$, που ορίζεται από τη σχέση

$$\phi(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) = [a]_0 + [a]_1 x + \cdots + [a]_n x^n$$

είναι ομομορφισμός δακτυλίων.
β) Έστω $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, τέτοιο ώστε, ο βαθμός τού $\phi(f(x))$ είναι ο ίδιος με τον βαθμό τού $f(x)$ και το $\phi(f(x))$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Z}_p[x]$. Αποδείξτε ότι, τότε, το $f(x)$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Q}[x]$.
γ) Αποδείξτε ότι το πολυώνυμο $f(x) = x^3 + 17x + 36$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Q}[x]$.