ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Χειμερινό Εξάμηνο 2018

Καθηγητής Ν.Γ. Τζανάκης

Περιληπτικές λύσεις των ασκήσεων του 11ου φυλλαδίου

Οι προτάσεις στις οποίες παραπέμπω βρίσκονται στην ιστοσελίδα του μαθήματος, 6η διδακτική εβδομάδα.

Λύση της 1. Από την πρόταση 6, $n \geq \dim V$. Αν ίσχυε το =, τότε τα $u_1, \ldots, u_n$ έχουν πλήθος = $\dim V$ και παράγουν τον V, άρα (πρόταση 4 β′) αποτελούν βάση του V. Αλλά τότε είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και αυτό αντιβαίνει στην υπόθεση.

Λύση της 2. Από την πρόταση 3, $n \leq \dim V$. Αν ίσχυε το =, τότε τα γραμμικώς ανεξάρτητα $u_1, \ldots, u_n \in V$ έχουν πλήθος = $\dim V$, άρα (πρόταση 4 α′) αποτελούν βάση του V. Αλλά τότε παράγουν τον V και αυτό αντιβαίνει στην υπόθεση.

Λύση της 3. Αν οι στήλες του A παράγουν τον $\mathbb{R}^m$, έπεται ότι $\mathcal{R}(A) = \mathbb{R}^m$. Τότε $\dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathbb{R}^m$, άρα $r(A) = m$. Επίσης, οι n στήλες παράγουν τον $\mathcal{R}(A)$, άρα (πρόταση 5) $n \geq \dim \mathcal{R}(A) = r(A)$. Συνδυάζοντας τα δύο συμπεράσματα παίρνομε $m = r(A) \leq n$.
Αν, επιπλέον, γνωρίζομε ότι οι στήλες είναι γραμμικώς εξαρτημένες, τότε εφαρμόζοντας την άσκηση 1 με V τον $\mathcal{R}(A)$ και $u_1, \ldots, u_n$ τις στήλες του A, συμπεραίνομε ότι $n > r(A)$.

Λύση της 4. Αν οι n στήλες του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, τότε αποτελούν n γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^m$, άρα (πρόταση 3) $n \leq m$. Από την άλλη, οι στήλες του A παράγουν τον $\mathcal{R}(A)$ και έχουν υποτεθεί γραμμικώς ανεξάρτητες, άρα το πλήθος τους n είναι ίσο με τη διάσταση του $\mathcal{R}(A)$, δηλαδή $n = r(A)$. Συνδυάζοντας τα δύο συμπεράσματα παίρνομε $r(A) = n \leq m$
Αν, επιπλέον, γνωρίζομε ότι οι στήλες δεν παράγουν τον $\mathbb{R}^m$, τότε εφαρμόζοντας την άσκηση 2 με V τον $\mathbb{R}^m$ και $u_1, \ldots, u_n$ τις στήλες του A, συμπεραίνομε ότι $n < m$.

Λύση της 5. Άμεσος συνδυασμός των ασκήσεων 3 και 4.

Λύση της 6. (α′) Έστω ότι $u_1, u_2 \in V \cap W$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Πρέπει και αρκεί να δείξομε ότι $u_1 + u_2 \in V \cap W$ και $\lambda u_1 \in V \cap W$. Πράγματι, ισχύει $u_1, u_2 \in V$ καθώς και $u_1, u_2 \in W$. Από την πρώτη σχέση έπεται ότι $u_1 + u_2 \in V$ (διότι ο V είναι υπόχωρος) και από τη δεύτερη ότι $u_1 + u_2 \in W$ (διότι ο W είναι υπόχωρος). Άρα $u_1 + u_2 \in V \cap W$. Επίσης, αφού $u_1 \in V$, έπεται ότι $\lambda u_1 \in V$ (διότι ο V είναι υπόχωρος) και ανάλογα $\lambda u_1 \in W$. Συνεπώς, $\lambda u_1 \in V \cap W$.
(β′) Προσέξτε ότι κάθε στοιχείο $z \in V + W$ είναι της μορφής $z = v + w$, με $v \in V$ και $w \in W$. Πρέπει και αρκεί να δείξομε ότι αν $z_1, z_2 \in V + W$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε $z_1 + z_2 \in V + W$ και $\lambda z_1 \in V + W$. Πράγμαται, γράφομε $z_1 = v_1 + w_1$, $z_2 = v_2 + w_2$, με $v_1, v_2 \in V$ και $w_1, w_2 \in W$. Τότε $z_1 + z_2 = (v_1 + v_2) + (w_1 + w_2)$ και παρατηρούμε ότι $v_1 + v_2 \in V$ (διότι ο V είναι

υπόχωρος) και $w_1 + w_2 \in V$ (διότι ο W είναι υπόχωρος), άρα $z_1 + z_2 \in V + W$. Επίσης, $\lambda z_1 = \lambda(v_1 + w_1) = \lambda v_1 + \lambda w_1$ και παρατηρούμε ότι $\lambda v_1 \in V$ (διότι ο V είναι υπόχωρος) και $\lambda w_1 \in W$ (διότι ο W είναι υπόχωρος), άρα $\lambda z_1 \in V + W$.