

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Χειμερινό Εξάμηνο 2018

Καθηγητής Ν.Γ. Τζανάκης

Ασκήσεις για το εργαστήριο της Πέμπτης 15 Νοεμβρίου

1. Υπολογίστε τον πίνακα της “κυκλικής” απεικόνισης $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, με τύπο $f(x_1, x_2, x_3) = (x_3, x_1, x_2)$.

Ποια απεικόνιση είναι η $f^3 (= f \circ f \circ f)$;

Ποια απεικόνιση είναι η $f^{100} (= \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{100})$;

2. Αν $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι ισομορφισμός, αποδείξτε ότι $M_{f^{-1}} = M_f^{-1}$. Χρησιμοποιείστε τη σχέση που αποδείξαμε στο μάθημα, $M_{g \circ f} = M_g \cdot M_f$.

Υπενθύμιση σχετικά με τον συμβολισμό: M_f συμβολίζει τον πίνακα της γραμμικής απεικόνισης f .

3. Γιατί οι απεικονίσεις $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με τύπο $f(x_1, x_2) = (3x_1 + x_2, 5x_1 + 2x_2)$ και $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με τύπο $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + 2x_3, x_1 + x_3, 2x_1 - x_2)$ είναι ισομορφισμοί; Γιατί η συνάρτηση $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με τύπο $h(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + 2x_3, x_1 + x_3, 2x_1 - x_2 + x_3)$ δεν είναι ισομορφισμός;

Υπολογίστε τις αντίστροφες απεικονίσεις f^{-1}, g^{-1} των f, g , αφού υπολογίσετε τους πίνακες $M_{f^{-1}}$ και $M_{g^{-1}}$, εφαρμόζοντας την άσκηση 2.

4. Έστω ο υπόχωρος $V = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ του \mathbb{R}^2 (δηλαδή, $V = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = x_1\}$). Ποια είναι η γεωμετρική περιγραφή του V ; Δώστε μια βάση του V .

Στη συνέχεια, θεωρήστε τους πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

και βρείτε ποιοι είναι οι υπόχωροι $L_A(V)$, $L_A^{-1}(V)$, $L_B(V)$, $L_B^{-1}(V)$. Περιγράψτε τους γεωμετρικά και για καθέναν από αυτούς δώστε μια βάση.

5. Θεωρήστε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ και τη γραμμική απεικόνιση $L_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

(α') Δείξτε ότι η L_A είναι επιμορφισμός και υπολογίστε διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^3$, τέτοιο ώστε $L_A(v) = (-2, 5)$.

(β') Υπολογίστε μια βάση για τον πυρήνα της L_A (δηλαδή, για τον υπόχωρο που συμβολίζουμε $\ker(L_A)$).

(γ') Ο πίνακας A έχει δεξιό ή αριστερό αντίστροφο; Υπολογίστε τον.

(δ') Υπολογίστε μια βάση του υποχώρου $L_A^{-1}(W)$, όπου $W = \langle (-2, 5) \rangle$.