ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Χειμερινό Εξάμηνο 2018

Καθηγητής Ν.Γ. Τζανάκης

Ασκήσεις για το εργαστήριο της Τρίτης 13 Νοεμβρίου

1. Έστω γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Αποδείξτε ότι και η απεικόνιση $f^2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι γραμμική. Υπενθύμιση: f^2 σημαίνει $f \circ f$.

2. Θεωρήστε τις γραμμικές απεικονίσεις:
   $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ με τύπο $f(x_1, x_2) = (x_1, x_1 + x_2, x_1 - x_2 + x_3)$,
   $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ με τύπο $g(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_3, x_2, -x_2 + x_3, x_1 + 3x_2 - 2x_3)$,
   $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ με τύπο $h(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4, 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4)$.
   (α΄) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της απεικόνισης $h \circ g \circ f$; Υπολογίστε τον πίνακα αυτής της απεικόνισης, καθώς και τον τύπο της.
   (β΄) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της απεικόνισης $g \circ f \circ h$; Υπολογίστε τον πίνακα αυτής της απεικόνισης, καθώς και τον τύπο της.
   (γ΄) Γιατί δεν ορίζεται η απεικόνιση $f \circ g \circ h$;

3. (α΄) Γιατί μια γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ όπου $m < n$, αποκλείεται να είναι 1-1;
   (β΄) Γιατί μια γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ όπου $m > n$, αποκλείεται να είναι επί;

4. Έστω η απεικόνιση
   $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με τύπο $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 - 3x_3, 7x_1 - x_2 + 6x_3, x_1 - x_2 + 4x_3)$.
   Γιατί η απεικόνιση αυτή είναι γραμμική; (Δείτε την άσκηση 4 του 12ου φυλλαδίου.)
   Κάνοντας χρήση του πίνακά της, αποδείξτε ότι η f δεν είναι ούτε 1-1 ούτε "επί".

5. Έστω ισομορφισμός $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Θεωρήστε την αντίστροφη απεικόνιση $f^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ και αποδείξτε ότι είναι γραμμική και, συνεπώς, είναι και αυτή ισομορφισμός.
   Υπόδειξη. Αφού η f είναι αμφιμονοσήμαντη, έπεται ότι, για κάθε $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ υπάρχει ακριβώς ένα $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, έτσι ώστε $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ και έχομε τότε $f^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{x}$. Έχοντας αυτό υπ' όψη, θεωρήστε $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ και αποδείξτε ότι $f^{-1}(\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = f^{-1}(\mathbf{y}_1) + f^{-1}(\mathbf{y}_2)$ καθώς και $f^{-1}(\lambda \mathbf{y}_1) = \lambda f^{-1}(\mathbf{y}_1)$.