# ΑΛΓΕΒΡΑ Ι, ΑΣΚΗΣΕΙΣ #7

**Πρόβλημα 1.** α) Δείξτε ότι τό πολυώνυμο $x^2+x+[1] \in \mathbb{Z}_5[x]$ διαιρεί τό πολυώνυμο $f(x) = x^5 - [2]x^4 + x^3 - x^2 + [2]x + [4] \in \mathbb{Z}_5[x]$.
β) Γράψτε τό πολυώνυμο $f(x)$ ως γινόμενο αναγώγων πολυωνύμων στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_5[x]$.

**Πρόβλημα 2.** Γράψτε τό πολυώνυμο $[2]x^3 + x^2 + [2]x + [2]$ ως γινόμενο αναγώγων πολυωνύμων στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_5[x]$.

**Πρόβλημα 3.** Για τά παρακάτω πολυώνυμα, βρείτε τίς αναλύσεις τους σε γινόμενο μονικών ανωγώγων πολύωνύμων:
α) $f(x) = x^4 - 16 \in \mathbb{C}[x]$.
β) $f(x) = x^4 - 16 \in \mathbb{R}[x]$.
γ) $f(x) = x^4 + 16 \in \mathbb{C}[x]$.
δ) $f(x) = x^4 + 16 \in \mathbb{R}[x]$.

**Πρόβλημα 4.** α) Έστω $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{Z}[x]$. Δείξτε ότι αν $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$, με $(r,s) = 1$, είναι ρίζα τού $f(x)$ τότε $r \mid a_0$ και $s \mid a_n$.
β) Δείξτε ότι τό πολυώνυμο $x^3 + 17x + 36 \in \mathbb{Q}[x]$ είναι ανάγωγο.

**Πρόβλημα 5.** Γράψτε τό πολυώνυμο $x^4 - x^3 + 3x^2 - x - 2$ ως γινόμενο αναγώγων πολυωνύμων στον δακτύλιο $\mathbb{Q}[x]$.

**Πρόβλημα 6.** Δείξτε ότι το πολυώνυμο $x^4 - 22x^2 + 1$ είναι ανάγωγο στον δακτύλιο $\mathbb{Q}[x]$.

**Πρόβλημα 7.** α) Βρείτε τήν ανάλυση τού $x^6 + 1 \in \mathbb{R}[x]$ σε γινόμενο μονικών ανωγώγων πολύωνύμων.
β) Βρείτε τήν ανάλυση τού $f(x) = x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 6x + 9 \in \mathbb{R}[x]$ σε γινόμενο μονικών αναγώγων πολυωνύμων. (Υπόδειξη: το $f(x)$ έχει ως ρίζα του τό $i\sqrt{3}$).

**Πρόβλημα 8.** Έστω $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$. Δείξτε ότι αν τό $a + b\sqrt{2}$, $a, b \in \mathbb{Q}$, είναι ρίζα τού $f(x)$ τότε και τό $a - b\sqrt{2}$ είναι ρίζα τού $f(x)$.

**Πρόβλημα 9.** Έστω $f(x) \in \mathbb{R}[x]$. Συμβολίζουμε ως $f^{(k)}(x)$ τήν $k-$παράγωγο τού $f(x)$, $k \geq 0$ (για $k = 0$, $f^{(0)}(x) = f(x)$). Δείξτε ότι $(x-a)^m \mid f(x)$ εάν και μόνον εάν $f^{(k)}(a) = 0$, για κάθε $k = 0, 1, \ldots, m-1$. (Υπόδειξη: Αν $\deg f(x) = n$, γράψτε τό πολυώνυμο Taylor τού $f(x)$, βαθμού $n$ και κέντρου $a$).

**Πρόβλημα 10.** Έστω $f(x), g(x) \in \mathbb{C}[x]$. Δείξτε ότι $(f(x), g(x)) = 1$ εάν και μονον εάν τά $f(x), g(x)$ δεν έχουν κοινή ρίζα.

**Πρόβλημα 11.** Έστω $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ ακέραιοι διαφορετικοί μεταξύ τους. Δείξτε ότι τό πολυώνυμο $f(x) = (x-a_1)\cdots(x-a_n) - 1 \in \mathbb{Z}[x]$ είναι ανάγωγο. (Υπόδειξη: Αν $f(x) = g(x)\,h(x)$, με $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ μή σταθερά πολυώνυμα, δείξτε ότι τό πολυώνυμο $g(x)+h(x)$ έχει περισσότερες ρίζες από ότι είναι ο βαθμός του και άρα είναι τό μηδενικό πολυώνυμο).