ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Χειμερινό Εξάμηνο 2018

Καθηγητής Ν.Γ. Τζανάκης

Απαντήσεις ή υποδείξεις για τις ασκήσεις του 9ου φυλλαδίου ασκήσεων

Απόδειξη της 1. (α′) Βλέπομε τα διανύσματα ως στήλες $m \times 1$ και κατασκευάζομε τον πίνακα $A = \left(u_1 \mid u_2 \mid \dots \mid u_n \right)$. Είναι $r(A) \leq m < n$, άρα $n - r(A) > 0$. Από τη θεωρία ξέρομε πως η τελευταία σχέση συνεπάγεται ότι οι στήλες του πίνακα A είναι γραμμικώς εξαρτημένες, δηλαδή, τα διανύσματα $u_1, \dots, u_n$ είναι γραμμικώς εξάρτημένα.
(β′) Ξέρομε ότι $\dim V$ είναι ο πληθάριθμος των στοιχείων μιας οποιασδήποτε βάσης του V. Έστω, λοιπόν, ότι $\dim V = n$. Αυτό σημαίνει ότι ο V έχει μία βάση με n διανύσματα. Επειδή είναι διανύσματα βάσης, αυτά είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Αν ήταν $n > m$, τότε θα είχαμε περισσότερα από m διανύσματα μέσα στον $\mathbb{R}^m$ και αυτό έρχεται σε αντίφαση με το (α′). Άρα αποκλείεται να είναι $n > m$, οπότε $n \leq m$ δηλαδή $\dim V \leq m$.

Απόδειξη της 2. (α′) Έστω $S \subset \{u_1, \dots, u_n\}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας ας υποθέσομε ότι $S = \{u_1, \dots, u_k\}$, $k < n$. Αν το S ήταν γραμμικώς εξαρτημένο, τότε θα υπήρχαν $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ **όχι όλα** 0, έτσι ώστε $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k = \mathbf{0}$. Αλλά τότε και $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k + 0 \cdot u_{k+1} + \cdots + 0 \cdot u_n = \mathbf{0}$. Σ' αυτή την τελευταία ισότητα οι συντελεστές δεν είναι όλοι 0, οπότε συμπεραίνομε ότι τα $u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, που έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση.
(β′) Τα $w, u_1, \dots, u_n$ έχουν υποτεθεί γραμμικώς εξαρτημένα, άρα υπάρχουν $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ **όχι όλα** 0, έτσι ώστε $\lambda_0 w + \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = \mathbf{0}$. Αν ήταν $\lambda_0 = 0$, τότε ένα τουλάχιστον από τα υπόλοιπα λ θα ήταν $\neq 0$ και, επιπλέον, $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = \mathbf{0}$, που θα σήμαινε ότι τα $u_1, \dots, u_n$ είναι ανεξάρτητα· άτοπο. Συνεπώς $\lambda_0 \neq 0$, οπότε μπορώ να λύσω την παραπάνω σχέση ως προς w και να πάρω $w = (-\lambda_1/\lambda_0)u_1 + \cdots + (-\lambda_n/\lambda_0)u_n$. Αφού το w εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των $u_1, \dots, u_n$, συμπεραίνω, βάσει της θεωρίας, ότι το σύνολο $\{w, u_1, \dots, u_n\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο.

(γ′) Έστω ότι ένα σύνολο περιέχει, πέραν των $u_1, \dots, u_n$ και επιπλέον στοιχεία $w_1, \dots, w_k$. Τα $u_1, \dots, u_n$ έχουν υποτεθεί γραμμικώς εξαρτημένα, άρα υπάρχουν $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ **όχι όλα** 0, έτσι ώστε $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = \mathbf{0}$. Τότε, όμως, και $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n + 0 \cdot w_1 + \cdots + 0 \cdot w_k = \mathbf{0}$ και οι συντελεστές στο αριστερό μέλος δεν είναι όλοι 0. Αυτό σημαίνει ότι τα $u_1, \dots, u_n, w_1, \dots, w_k$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

(δ′) Έστω $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ και $w \in T$, $w \notin \mathcal{B}$. Επειδή $\mathcal{B}$ είναι βάση του V και $w \in V$, έπεται ότι υπάρχουν $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ τέτοια ώστε $w = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n$. Αυτό σημαίνει ότι το σύνολο $\{w, b_1, \ldots, b_n\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο. Επιπλέον, το σύνολο αυτό περιέχεται στο T, άρα, από το (γ′) συμπεραίνομε ότι και το T είναι γραμμικώς εξαρτημένο.

Απόδειξη της 3. Είναι φανερό ότι το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών των $u_1, \ldots, u_k$, δηλαδή ο υπόχωρος $\langle u_1, \ldots, u_k \rangle$, περιέχεται στο σύνολο των γραμμικών συνδυασμών των $u_1, \ldots, u_k, w_1, \ldots, w_l$ δηλαδή, περιέχεται στον υπόχωρο $\langle u_1, \ldots, u_k, w_1, \ldots, w_l \rangle$. Άρα $\langle u_1, \ldots, u_k, w_1, \ldots, w_l \rangle \supseteq \langle u_1, \ldots, u_k \rangle$. Μένει να δείξομε τον αντίστροφο εγκλεισμό, δηλαδή να δείξομε ότι κάθε γραμμικός συνδυασμός $(*)$ $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k + \mu_1 w_1 + \cdots + \mu_l w_l$ ανήκει στον υπόχωρο $\langle u_1, \ldots, u_k \rangle$, δηλαδή μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός μόνο των $u_1, \ldots, u_k$.

Πράγματι, κάθε w_i ανήκει στον υπόχωρο $\langle u_1, \ldots, u_k \rangle$, άρα γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $u_1, \ldots, u_k$, έστω $w_i = a_{i1} u_1 + \cdots + a_{ik} u_k$. Αν στον γραμμικό συνδυασμό $(*)$ αντικαταστήσομε κάθε w_i $(i = 1, \ldots, l)$ με την έκφρασή από την παραπάνω σχέση, βλέπομε πολύ εύκολα ότι ο $(*)$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός μόνο των $u_1, \ldots, u_k$.

Απόδειξη της 4. Αν τα $w, u_1, \ldots, u_n$ ήταν γραμμικώς εξαρτημένα, θα υπήρχαν $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ **όχι όλα** 0, έτσι ώστε $(**)$ $\lambda_0 w + \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = \mathbf{0}$. Αν $\lambda_0 = 0$, τότε δεν είναι όλα $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ μηδέν και, επιπλέον, $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = \mathbf{0}$. Αυτό, όμως, θα σήμαινε ότι τα $u_1, \ldots, u_n$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα· αντίφαση. Αν $\lambda_0 \neq 0$, τότε λύνοντας την $(**)$ ως προς w, βλέπομε ότι το w εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των $u_1, \ldots, u_n$, δηλαδή, $w \in \langle u_1, \ldots, u_n \rangle$· και πάλι αντίφαση. Άρα, αναγκαστικά, τα $w, u_1, \ldots, u_n$ ήταν γραμμικώς ανεξάρτητα.

Απόδειξη της 5. Έστω $\dim V = n = \dim V'$ και βάση $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ του V. Προφανώς $V \subseteq V'$, άρα $\mathcal{B} \subset V'$. Αν $w \notin \langle b_1, \ldots, b_n \rangle$, τότε από την άσκηση 4, τα $w, u_1, \ldots, u_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Δηλαδή βρήκαμε $n + 1$ γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του υποχώρου V', του οποίου η διάσταση είναι n. Αυτό είναι άτοπο, διότι η διάσταση ενός υποχώρου δείχνει το μέγιστο πλήθος γραμμικώς ανεξαρτήτων διανυσμάτων, που μπορούμε να βρούμε μέσα σ' αυτόν. Καταλήξαμε σε αντίφαση υποθέτοντας ότι $w \notin \langle b_1, \ldots, b_n \rangle$, άρα $w \in \langle b_1, \ldots, b_n \rangle$. Αφού τα $b_1, \ldots, b_n$ είναι βάση του V, έπεται ότι $\langle b_1, \ldots, b_n \rangle = V$, άρα $w \in V$.