ΑΛΓΕΒΡΑ Ι, ΑΣΚΗΣΕΙΣ #6

Πρόβλημα 1. Διαιρέστε τό $f(x) = x^5 - x^3 + [3]x - [5]$ με τό $g(x) = [2]x^2 + [7]$, θεωρώντας τα ως πολυώνυμα:
α) τού $\mathbb{Z}_3[x]$,
β) τού $\mathbb{Z}_9[x]$.

Πρόβλημα 2. **α)** Κάνετε τήν διαίρεση τού πολυωνύμου $f(x) = [2]x^4 + x^3 + x^2 + [6]x + [2]$ διά τού $g(x) = [2]x^2 + [1]$ στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_7[x]$.
β) Κάνετε τήν διαίρεση τού πολυωνύμου $[2]x^5 - x^3 + [3]x - [1]$ διά τού $[4]x^2 + [3]$ στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_5[x]$.

Πρόβλημα 3. Να βρεθεί ο μ.κ.δ. $d(x)$ τών πολυωνύμων $f(x) = x^3 + [4]x^2 - x + [1]$ και $g(x) = x^3 - x^2 + x + [4]$ τού $\mathbb{Z}_5[x]$. Να γραφεί τό $d(x)$ ως $d(x) = a(x)f(x) + b(x)g(x)$, για κάποια $a(x), b(x) \in \mathbb{Z}_5[x]$.

Πρόβλημα 4. **α)** Είναι τό $x^2 + [1]$ ανάγωγο ως πολυώνυμο τού $\mathbb{Z}_3[x]$;
β) Είναι τό $x^2 + [1]$ ανάγωγο ως πολυώνυμο τού $\mathbb{Z}_5[x]$;

Πρόβλημα 5. Βρείτε όλα τά ανάγωγα πολυώνυμα βαθμού 4 στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_2[x]$.

Πρόβλημα 6. Γράψτε τό πολυώνυμο $x^4 - [1]$ ως γινόμενο μονικών αναγώγων πολυωνύμων, θεωρώντας το ως πολυώνυμο τών δακτυλίων $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{Z}_2[x]$, $\mathbb{Z}_3[x]$.

Πρόβλημα 7. **α)** Αναλύστε τό πολυώνυμο $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ σε γινόμενο τριών μή σταθερών πολυωνύμων τού $\mathbb{Q}[x]$.
β) Αναλύστε τό πολυώνυμο $x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ σε γινόμενο τριών μή σταθερών πολυωνύμων τού $\mathbb{Q}[x]$, όπως επίσης, και σε γινόμενο επτά πρωτοβάθμιων πολυωνύμων τού $\mathbb{C}[x]$.

Πρόβλημα 8. **α)** Δείξτε ότι τό πολυώνυμο $x^6 + x^4 + x^2 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ δεν είναι ανάγωγο (Υποδειξη: συσχετίστε το με τό $x^8 - 1$).
β) Δείξτε ότι τό πολυώνυμο $x^4 + x^2 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ δεν είναι ανάγωγο (Υποδειξη: συσχετίστε το με τό $x^6 - 1$).

Πρόβλημα 9. Δείξτε ότι τό πολυώνυμο $x^4 + 16 \in \mathbb{R}[x]$ δεν είναι ανάγωγο πολυώνυμο.

Πρόβλημα 10. **α)** Δείξτε ότι τό πολυώνυμο $x^4 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ είναι ανάγωγο.
β) Κάνοντας την διαίρεση τού $x^4 + [1]$ δια τού $x^2 + x + [2]$ στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_3[x]$, δείξτε ότι το $x^4 + [1]$ δεν είναι ανάγωγο πολυώνυμο στον $\mathbb{Z}_3[x]$.

Πρόβλημα 11. **α)** Βρείτε όλα τά μονικά ανάγωγα πολυώνυμα βαθμού ≤ 2 στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_3[x]$. Δείξτε ότι τό γινόμενό τους ισούται προς $x^9 - x$.

β) Βρείτε όλα τά μονικά ανάγωγα πολυώνυμα βαθμού 1 ή 3 στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_3[x]$. Δείξτε ότι τό γινόμενό τους ισούται προς $x^{27} - x$.

Πρόβλημα 12. Βρείτε τό υπόλοιπο τής διαίρεσης τού $x^{162} - [3]x^{33} + x^{18} - [1]$ διά τού $x - [2]$ στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_{17}[x]$ (Υπόδειξη: Ποιό είναι τό υπόλοιπο τής διαίρεσης ενός πολυωνύμου $f(x)$ διά τού $x - [a]$;).