ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Χειμερινό Εξάμηνο 2018

Καθηγητής Ν.Γ. Τζανάκης

Απαντήσεις ή υποδείξεις για τις ασκήσεις του 7ου φυλλαδίου ασκήσεων

Υπόδειξη και απαντήσεις στην 1. Φανταζόμαστε όλα τα διανύσματα σαν στήλες. Αν $A = \left(u_1 \mid u_2 \mid u_3 \right)$, τότε ένα διάνυσμα $w \in \mathbb{R}^4$ ανήκει στον υπόχωρο $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ αν και μόνο αν υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε $w = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3$. Αυτή η σχέση ισοδυναμεί με την $A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = w$. Άρα $w \in \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ αν και μόνο αν το σύστημα $Ax = w$ έχει λύση. Από θεώρημα, το σύστημα αυτό έχει λύση αν και μόνο αν $r(A) = r(A|w)$. Θα πρέπει να βρείτε ότι $r(A) = 3$, $r(A|w_1) = 3$, $r(A|w_2) = 3$ και $r(A|w_3) = 4$. Επομένως, $w_1, w_2 \in \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ ενώ $w_3 \notin \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$.

Υπόδειξη και απαντήσεις στην 2. Κατ' αρχάς, από τον ορισμό των $\mathcal{N}(A)$, $\mathcal{R}(A^T)$ και $\mathcal{R}(A)$ έχομε ότι οι δύο πρώτοι είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$, ενώ ο τρίτος είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$. Επομένως, στον $\mathcal{N}(A)$ δεν μπορεί ν' ανήκουν τα w_2, w_3, w_5. Για να δούμε ποιο από τα w_1, w_4 ανήκει στον $\mathcal{N}(A)$, αρκεί να εξετάσομε για ποιο $i \in \{1, 4\}$ ισχύει $Aw_i = \mathbf{0}$. Διαπιστώνομε ότι ισχύει για $i = 4$ και δεν ισχύει για $i = 1$, άρα ο $\mathcal{N}(A)$ περιέχει μόνο το διάνυσμα w_4.
Τώρα πάμε στον χώρο γραμμών $\mathcal{R}(A^T) \subseteq \mathbb{R}^3$. Προφανώς, τα $w_2, w_3, w_5 \in \mathbb{R}^4$ δεν ανήκουν στον $\mathcal{R}(A^T)$. Μένουν τα w_1, w_4. Μπορούμε να εργαστούμε όπως στην άσκηση 1. Το ερώτημα τώρα είναι: Αν $u_1 = (1, -2, 3)$, $u_2 = (3, 0, 5)$, $u_3 = (1, 1, 1)$, $u_4 = (1, 7, -3)$, ποιο από τα w_1, w_4 ανήκει στον υπόχωρο $\langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle$; Εργαζόμενοι όπως στην άσκηση 1 θα βρείτε ότι $w_1 \in \langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle$ ενώ $w_4 \notin \langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle$. [1]
Τέλος, πάμε στον χώρο στηλών $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathbb{R}^4$. Προφανώς, τα $w_1, w_4 \in \mathbb{R}^3$ δεν ανήκουν στον $\mathcal{R}(A)$, άρα μένει να εξετάσομε ποια από τα w_2, w_3, w_5 ανήκουν σε αυτόν. Το w_2 είναι το μηδενικό διάνυσμα, άρα ανήκει στον $\mathcal{R}(A)$, αφού κάθε υπόχωρος περιέχει το μηδενικό διάνυσμα. Για τα w_2, w_5 εργαζόμαστε ακριβώς όπως στην άσκηση 1. Εδώ τα διανύσματα u_1, u_2, u_3 είναι οι στήλες του A και το ερώτημα είναι ποιο από τα w_2, w_5 ανήκει στον υπόχωρο $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle$. Θα βρείτε ότι $w_2 \in \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ ενώ $w_5 \notin \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$.

Απάντηση στην άσκηση 3. Μηδενόχωρος του Z: $\mathcal{N}(Z) = \mathbb{R}^4$. Χώρος γραμμών του Z: $\mathcal{R}(Z^T) = \{(0, 0, 0, 0)\}$ (μηδενικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$). Χώρος στηλών του Z: $\mathcal{R}(Z) = \{(0, 0, 0)\}$ (μηδενικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$).

[1] *Σημείωση.* Υπάρχει και απλούστερος τρόπος, αλλά βασίζεται σε θεωρία που θα διδαχθεί σε επόμενα μαθήματα. Θα επανέλθομε σε επόμενο φυλλάδιο ασκήσεων.

Υπόδειξη στην άσκηση 4. Υπολογίστε κλιμακωτό U του A. Θα βρείτε ότι έχει δύο μη μηδενικές γραμμές. Σύμφωνα με τη θεωρία, αυτές οι δύο γραμμές παράγουν τον χώρο γραμμών $\mathcal{R}(U^T)$ του U. Από τη θεωρία ξέρομε ότι οι χώροι γραμμών $\mathcal{R}(A^T)$ του A και $\mathcal{R}(U^T)$ του U είναι ίσοι, άρα οι δύο μη μηδενικές γραμμές του U παράγουν τον χώρο γραμμών του A.

Για τον χώρο στηλών εργαστείτε εντελώς ανάλογα, κάνοντας πρώτα τις στήλες γραμμές, δηλαδή, δουλεύοντας με τον A^T. Υπολογίστε τον κλιμακωτό του, έστω V, και θα βρείτε ότι έχει δύο μη μηδενικές γραμμές. Όπως πριν, θα συμπεράνετε ότι ο χώρος γραμμών του A^T παράγεται από τις δύο μη μηδενικές γραμμές του V. Άρα ο χώρος στηλών του A παράγεται από τις δύο στήλες που προκύπτουν αν θεωρήσομε τις ανάστροφες των δύο αυτών μη μηδενικών γραμμών του V, δηλαδή, αν μετά που θα βρούμε τις δύο μη μηδενικές γραμμές του V, "τις μετατρέψομε σε στήλες". [2]

Απάντηση στην άσκηση 5. Η σχέση $\mathcal{R}(A) = \mathbb{R}^3$ ισοδυναμεί με το ότι κάθε $b \in \mathbb{R}^3$ (δείτε το b ως στήλη) είναι γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A. Αυτό, με τη σειρά του, ισοδυναμεί με το ότι το μη ομογενές σύστημα με πίνακα $(A|b)$ έχει λύση, κάτι που αληθεύει αν και μόνο αν $r(A|b) = r(A)$. Στην περίπτωσή μας ισχύει η τελευταία ισότητα. Πράγματι, βρίσκοντας κλιμακωτό του A, θα δείτε ότι έχει 3 οδηγούς, άρα $r(A) = 3$. Αλλά, αφού ο πίνακας $(A|b)$ έχει διάσταση 3×4, η $r(A|b)$ δεν μπορεί να είναι > 3, άρα $r(A|b) = 3 = r(A)$.
Για τον χώρο γραμμών $\mathcal{R}(A^T)$ εργαστείτε ανάλογα, "κάνοντας τις στήλες γραμμές", δηλαδή εργαζόμενοι με τον A^T και αποδεικνύοντας ότι, για κάθε 3×1 στήλη b ισχύει $r(A^T|b) = 3 = r(A^T)$. [3]

[2] Ανάλογο σχόλιο με αυτό της υποσημείωσης 1.

[3] Ανάλογο σχόλιο με αυτό της υποσημείωσης 1.