ΑΛΓΕΒΡΑ Ι, ΑΣΚΗΣΕΙΣ #5

Πρόβλημα 1. α) Έστω R δακτύλιος και S_0 τό υποσύνολο τού $R[x]$ που περιέχει τά πολυώνυμα με σταθερό όρο μηδέν (δηλ. $a_0 = 0$). Δείξτε ότι τό S_0 είναι υποδακτύλιος τού $R[x]$. Ισχύει τό ίδιο αν ο σταθερός όρος είναι τό 1_R;
β) Έστω R δακτύλιος και $a \in R$. Ορίζουμε ως $S_a = \{f(x) \in R[x] \text{ με } f(a) = 0\}$. Δείξτε ότι τό S_a είναι υποδακτύλιος τού $R[x]$.

Πρόβλημα 2. Να υπολογίσετε τά παρακάτω γινόμενα στο $\mathbb{Z}_5[x]$:
α) $(-[4] + x + [3]x^2)([3] - x + [3]x^2)$.
β) $([1] - [2]x^2 + [3]x^6)([2] + [2]x + [7]x^2)$.

Πρόβλημα 3. Να βρεθούν όλα τά πολυώνυμα $f(x)$ τού $\mathbb{Z}[x]$ που ικανοποιούν τήν συνθήκη $f(x) = f(-x)$. Ομοίως, να βρεθούν όλα τά πολυώνυμα τού $\mathbb{Z}_2[x]$ που ικανοποιούν τήν παραπάνω συνθήκη.

Πρόβλημα 4. Βρείτε τά αντιστρέψιμα στοιχεία στους επόμενους δακτυλίους:
α) $\mathbb{Z}[x]$.
β) $\mathbb{Z}_5[x]$.
γ) $\mathbb{Z}_2[x]$.

Πρόβλημα 5. α) Δείξτε ότι τό πολυώνυμο $[3] + [2]x + [2]x^2$ είναι αντιστρέψιμο στοιχείο τού δακτυλίου $\mathbb{Z}_4[x]$ (Υπόδειξη: ποιό είναι τό $f(x)^2$;).
β) Έστω $f(x) = [a_0] + [a_1]x + \cdots + [a_n]x^n \in \mathbb{Z}_4[x]$. Δείξτε ότι αν για κάθε $i \geq 1$ έχουμε $[a_i] = [0]$ ή $[2]$ τότε το $f(x)$ είναι αντιστρέψιμο στοιχείο τού δακτυλίου $\mathbb{Z}_4[x]$.

Πρόβλημα 6. α) Δείξτε ότι τό πολυώνυμο $[3] + [4]x \in \mathbb{Z}_8[x]$ είναι αντιστρέψιμο στοιχείο τού δακτυλίου $\mathbb{Z}_8[x]$.
β) Δείξτε ότι τό πολυώνυμο $[2] + x \in \mathbb{Z}_8[x]$ δεν είναι αντιστρέψιμο στοιχείο τού δακτυλίου $\mathbb{Z}_8[x]$.

Πρόβλημα 7. α) Έστω R μεταθετικός δακτύλιος και έστω ότι το πολυώνυμο $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in R[x]$, όπου $a_n \neq 0$, είναι διαιρέτης τού μηδενός. Δείξτε τότε ότι τό $a_n \in R$ είναι διαιρέτης τού μηδενός. Ισχύει και τό αντίστροφο;
β) Έστω R μεταθετικός δακτύλιος με 1_R και έστω ότι τό πολυώνυμο $f(x) = a + bx$ είναι αντιστρεψιμο. Δείξτε τότε ότι το a είναι αντιστρέψιμο στοιχείο του R και το b μηδενοδύναμο στοιχείο τού R. Ισχύει και τό αντίστροφο;

Πρόβλημα 8. Έστω p πρώτος αριθμός.
α) Έστω $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε τις εξής γενικεύσεις τού προβλήματος 12β), φυλλάδιο 1:
i) $([a] + [b])^{p^n} = [a]^{p^n} + [b]^{p^n}$, για καθε $[a], [b] \in \mathbb{Z}_p$.
ii) $([a_1] + \cdots + [a_k])^{p^n} = [a_1]^{p^n} + \cdots + [a_k]^{p^n}$, για καθε $[a_1], \cdots, [a_k] \in \mathbb{Z}_p$.
β) Με χρήση τού ερωτήματος α) δείξτε ότι άν $f(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ τότε $f(x)^p = f(x^p)$.
γ) Δείξτε ότι η εξίσωση $x^p - [1] = [0]$, έχει μοναδική λύση στο $\mathbb{Z}_p[x]$.

Πρόβλημα 9. Έστω $M_2(\mathbb{Z})$ ο δακτυλιος τών 2×2 πινάκων με στοιχεία στό $\mathbb{Z}$. Δείξτε ότι $A \in M_2(\mathbb{Z})$ αντιστρέψιμος εάν και μόνον αν $\det A = \pm 1$.

Πρόβλημα 10. Έστω p πρώτος αριθμός και $f(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ πολυώνυμο βαθμού $> p$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα πολυώνυμο $g(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ βαθμού $< p$ με $f([a]) = g([a])$ γιά κάθε $[a] \in \mathbb{Z}_p$.

Πρόβλημα 11. Έστω $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ ένας θετικός ακέραιος ελεύθερος τετραγώνων, δηλ. που δεν είναι τής μορφής $d = m^2$ για καποιον ακέραιο m.
α) Δείξτε ότι ο $\sqrt{d}$ είναι άρρητος αριθμός.
β) Δείξτε ότι τό σύνολο $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{m + n\sqrt{d}, \quad m, n \in \mathbb{Z}\}$ είναι υποδακτύλιος τού δακτυλίου τών πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.
γ) Δείξτε ότι η απεικόνιση $N : \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \to \mathbb{Z}$ που ορίζεται ως $N(m + n\sqrt{d}) = m^2 - dn^2$ ικανοποιεί τήν ιδιότητα $N(ab) = N(a)\,N(b)$, για κάθε $a, b \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.
δ) Δείξτε ότι αν $m^2 - dn^2 = \pm 1$ τότε τό στοιχείο $m + n\sqrt{d}$ είναι αντιστρέψιμο στοιχείο τού $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. Κατόπιν, μέ χρήση τού ερωτήματος γ), δείξτε και το αντίστροφο, δηλ, αν τό στοιχείο $m + n\sqrt{d}$ είναι αντιστρέψιμο στοιχείο τού $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ τότε $m^2 - dn^2 = \pm 1$.