ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Χειμερινό Εξάμηνο 2018

Καθηγητής Ν.Γ. Τζανάκης

Απαντήσεις ή υποδείξεις για κάποιες ασκήσεις του 5ου φυλλαδίου ασκήσεων

Λύση του ερωτήματος 1(β΄). Έχομε ’δει (είναι αναρτημένο και στην ιστοσελίδα· βλ. 3η διδακτική εβδομάδα) ότι ένα σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ έχει λύση αν και μόνο αν $r(A|\mathbf{b}) = r(A)$. Στο ερώτημα (α΄) πρέπει να έχετε βρει ότι $r(A) = 3$, άρα ο κλιμακωτός του A έχει 3 οδηγούς. Αυτοί είναι οδηγοί και για τον κλιμακωτό $(A|\mathbf{b})$. Όμως, το πλήθος των οδηγών δεν μπορεί να υπερβαίνει το πλήθος των γραμμών, που είναι 3, άρα $r(A|\mathbf{b}) = 3 = r(A)$. Συνεπώς, σύμφωνα με αυτό που αναφέρθηκε πιο πάνω, το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ έχει λύση.

Υπόδειξη στην 3. Πρόκειται για δύο μη ομογενή “συστήματα”, που το καθένα έχει μία εξίσωση και 4 αγνώστους. Προσοχή! Στο πρώτο, η μεταβλητή (άγνωστος) x_3 έχει συντελεστή 0. Αυτό δεν σημαίνει πως πρέπει να την παραλείψετε! Ανάλογο σχόλιο για τη μεταβλητή x_1 του δευτέρου.

Υπόδειξη στην 4. Σύμφωνα με τη θεωρία,

γενική λύση του μη ομογενούς = μια οποιαδήποτε ειδική λύση του μη ομογενούς
+ γενική λύση του αντίστοιχου ομογενούς.

Εδώ, μας δίνουν ότι μια ειδική λύση του μη ομογενούς είναι $(1, -1, 2, 3)$. Επίσης, το αντίστοιχο ομογενές σύστημα έχει δύο βασικές λύσεις $(0, 2, 1, 1)$ και $(-1, 0, 0, 1)$, επομένως, η γενική λύση του ομογενούς είναι $\lambda(0, 2, 1, 1) + \mu(-1, 0, 0, 1)$. Για να εξετάσω, λοιπόν, αν το η τετράδα $(0, 2, 0, -1)$ είναι λύση, θα πρέπει να ’δω αν υπάρχουν λ, μ, τέτοια ώστε $(0, 2, 0, -1) = (1, -1, 2, 3) + \lambda(0, 2, 1, 1) + \mu(-1, 0, 0, 1)$. Αν γράψω αυτή τη σχέση με στήλες, αυτή γίνεται

$$\lambda\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

και αυτή είναι ισοδύναμη με το σύστημα (άγνωστοι λ, μ)

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix},$$

οπότε εξετάζω αν αυτό το σύστημα έχει λύση. Ανάλογα και για την τετράδα $(6, 5, 5, 1)$.

Υπόδειξη στην 5. Έχομε 'πει ότι ένας πίνακας μπορεί να έχει περισσότερους από έναν κλιμακωτούς πίνακες, ανάλογα με τη διαδικασία που ακολουθούμε. Μια γενική συμβουλή είναι, όταν στον πίνακα υπάρχουν παράμετροι, όπως σε τούτη την άσκηση τα κ, λ, να αποφεύγομε (αν είναι δυνατόν) αυτές να εμφανίζονται σε θέσεις οδηγών. Στην άσκηση αυτή, για να απαντήσετε στα ερωτήματα (α΄), (β΄), (γ΄), θα διευκολυνθείτε πολύ αν ακολουθήσετε αυτή τη συμβουλή, οπότε ως κλιμακωτό του $(A|\mathbf{b})$ θα βρείτε τον

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1-3k/2 & \lambda - 2\kappa \end{array}\right).$$