ΑΛΓΕΒΡΑ Ι, ΑΣΚΗΣΕΙΣ #4

Πρόβλημα 1. Δείξτε ότι τό σύνολο $\mathbb{Z}[i] = \{m + in,\ m, n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$ εφοδιασμένο με τήν συνηθισμένη πρόσθεση και πολλαπλασιασμό τών μιγαδικών αριθμών είναι μεταθετικός δακτύλιος. Βρείτε τά αντιστρέψιμα στοιχεία του. Είναι ο παραπάνω δακτύλιος ακέραια περιοχή;

Πρόβλημα 2. Εστω M τό σύνολο τών 2×2 πινάκων τής μορφής $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, με $a, b \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι τό M εφοδιασμένο με τήν συνηθισμένη πρόσθεση και πολλαπλασιασμό πινάκων είναι σώμα.

Πρόβλημα 3. α) Δείξτε ότι τό σύνολο $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{m + n\sqrt{2}, \quad m, n \in \mathbb{Z}\}$ είναι υποδακτύλιος τού δακτυλίου τών πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.
β) Δείξτε ότι αν $s \in \mathbb{Z}_{>0}$, τό στοιχείο $(3-2\sqrt{2})^s$ είναι αντιστρέψιμο στοιχείο τού $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

Πρόβλημα 4. α) Δείξτε ότι τό σύνολο $\mathbb{Q}[\sqrt{5}] = \{a + b\sqrt{5}, \quad a, b \in \mathbb{Q}\}$ είναι υπόσωμα τού σώματος τών πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.
β) Δείξτε ότι τό σύνολο $\mathbb{Q}[i] = \{a + bi, \quad a, b \in \mathbb{Q}\}$ είναι υπόσωμα τού σώματος τών μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$.

Πρόβλημα 5. Έστω $S = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \text{συνεχής συνάρτηση}\}$. Στο S ορίζονται οι πράξεις τού αθροίσματος και τού γινομένου δύο συνεχών συναρτήσεων. Δείξτε ότι τό S εφοδιασμένο με τις παραπάνω πράξεις είναι ενας μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο. Ποιά είναι τά αντιστρέψιμα στοιχεία τού S; Έχει ο S διαιρέτες τού μηδενός;

Πρόβλημα 6. α) Έστω S_1 και S_2 υποδακτύλιοι δακτυλίου R. Δείξτε ότι η τομή τους $S_1 \cap S_2$ είναι υποδακτύλιος τού R. Ισχύει τό ίδιο για τήν ένωσή τους $S_1 \cup S_2$;
β) Αν $n \in \mathbb{N}$ δείξτε ότι τό $n\mathbb{Z}$ (δηλ. τό συνολο τών πολλάπλασίων τού n) είναι υποοδακτύλιος τού $\mathbb{Z}$.
γ) Δείξτε ότι αν $n, m \in \mathbb{N}$ τότε $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} = e\mathbb{Z}$, όπου e είναι τό ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των n και m.

Πρόβλημα 7. Βρείτε όλους τούς διαιρέτες τού μηδενός στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_{20}$. Γιά κάθε τέτοιο μηδενοδιαιρέτη $[a]$ βρείτε ένα στοιχείο $[b] \neq [0]$ με $[a][b] = [0]$.

Πρόβλημα 8. Να λυθούν οι εξισώσεις:
α) $x^2 - [2]x + [2] = [0]$ στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_6$. (δηλ. να βρεθούν όλα τα $[a] \in \mathbb{Z}_6$ με $[a]^2 - [2][a] + [2] = [0]$).
β) $x^2 + [2]x - [2] = [0]$ στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_6$.

Πρόβλημα 9. Για να βρούμε τις ακέραιες λύσεις τής εξίσωσης $x^3 - 2x^2 - 3x = 0$ δουλεύουμε ως εξής:

$$x^3 - 2x^2 - 3x = 0 \iff x(x-3)(x+1) = 0 \iff x = 0, 3, -1\,.$$

Η παραπάνω παραγοντοποίηση ισχύει και στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_{12}$. Όμως η παραπάνω εξίσωση έχει ως λύσεις στον $\mathbb{Z}_{12}$, εκτός τών $[0],\ [3], [-1] = [11]$, και τήν $[8]$. Μπορείτε να δώσετε μια εξήγηση για αυτό;

Πρόβλημα 10. Εστω p πρώτος αριθμός. Ορίζουμε ως

$$A_p = \{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q},\ \text{όπου } m, n \in \mathbb{Z} \text{ και μ.κ.δ.} (p, n) = 1\} \subseteq \mathbb{Q}\,.$$

α) Δείξτε ότι τό A_p εφοδιασμένο με τήν συνήθη πρόσθεση και πολλαπλασιασμό είναι μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο.
β) Βρείτε τά αντιστρέψιμα στοιχεία του.

Πρόβλημα 11. α) Δείξτε ότι τό σύνολο τών πινάκων τής μορφής $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, με $a, b, c \in \mathbb{Z}$ εφοδιασμένο με την συνηθισμένη πρόσθεση και πολλαπλασιασμό πινάκων είναι δακτύλιος. Βρείτε τά αντιστρέψιμα στοιχεία του. Είναι ο παραπάνω δακτύλιος ακέραια περιοχή;

β) Δείξτε ότι τό σύνολο τών πινάκων τής μορφής $\begin{pmatrix} a & [b] \\ 0 & c \end{pmatrix}$, με $a, c \in \mathbb{Z}$ και $[b] \in \mathbb{Z}_2$, εφοδιασμένο με τήν συνηθισμένη πρόσθεση και πολλαπλασιασμό πινάκων είναι δακτύλιος. Δείξτε ότι τό στοιχείο $\begin{pmatrix} 2 & [1] \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ τού παραπάνω δακτυλίου είναι αριστερός αλλά όχι δεξιός μηδενοδιαιρέτης.

Πρόβλημα 12. Δείξτε ότι τό σύνολο $S = \{\frac{a}{2^n},\ a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{Q}$ εφοδιασμένο με τήν συνηθισμένη πρόσθεση και πολλαπλασιασμό τών ρητών αριθμών είναι μεταθετικός δακτύλιος. Βρείτε τά αντιστρέψιμα στοιχεία του. Είναι ο παραπάνω δακτύλιος ακέραια περιοχή;