ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Χειμερινό Εξάμηνο 2018

Καθηγητής Ν.Γ. Τζανάκης

Ασκήσεις για το εργαστήριο της Πέμπτης 18 Οκτωβρίου

1. Δίδονται τα διανύσματα $u = (2, 1, -1)$, $w = (1, 1, 3) \in \mathbb{R}^3$. Για καθένα από τα διανύσματα $v_1 = (7, 4, 0)$, $v_2 = (1, 1, 0)$, $v_3 = (2, 3, 13)$ εξετάστε αν είναι γραμμικός συνδυασμός των u, w. Για το (ή τα) v_i που είναι, υπολογίστε τους αριθμούς λ και μ, για τους οποίους ισχύει η σχέση $v_i = \lambda u + \mu w$.

   Σύμφωνα με το παράδειγμα που κάναμε στο μάθημα, γράψτε όλα τα διανύσματα ως στήλες και λύστε, ταυτόχρονα, τρία γραμμικά συστήματα, με τον ίδιο πίνακα συντελεστών.

2. Εξετάστε ποιοι από τους παρακάτω πίνακες είναι αντιστρέψιμοι και για αυτούς που είναι, υπολογίστε τον αντίστροφο.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Έστω ότι $v_1, v_2, \ldots, v_n$ είναι διανύσματα (δείτε τα ως στήλες) του $\mathbb{R}^n$, τέτοια ώστε ο πίνακας $A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} v_1 & v_2 & \ldots & v_n \end{array} \right)$ (δηλαδή, A είναι ο $n \times n$ πίνακας του οποίου οι στήλες είναι $v_1, v_2, \ldots, v_n$) να έχει τάξη $r(A) = n$. Αποδείξτε ότι κάθε $u \in \mathbb{R}^n$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

   Υπόδειξη. Δείτε ότι, το να είναι κάποιο $u \in \mathbb{R}^n$ (δείτε το ως στήλη) γραμμικός συνδυασμός των $v_1, v_2, \ldots, v_n$ είναι ισοδύναμο με το ότι το σύστημα $Ax = u$ έχει λύση. Στο σύστημα αυτό αντιστοιχεί ο πίνακας $(A|u)$. Δείτε τώρα τί λέει η άσκηση 6 του 4-ου φυλλαδίου ασκήσεων.