ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Χειμερινό Εξάμηνο 2018

Καθηγητής Ν.Γ. Τζανάκης

Απαντήσεις ή υποδείξεις για κάποιες ασκήσεις του 4ου φυλλαδίου ασκήσεων

Λύση του ερωτήματος 1. Από τη θεωρία ξέρω ότι το γινόμενο αντιστρεψίμων πινάκων είναι πίνακας αντιστρέψιμος, άρα, αφού όλοι οι πίνακες $C_1, C_2, \ldots, C_k$ είναι αντιστρέψιμοι, έπεται ότι και το γινόμενό τους $C = C_k C_{k-1} \cdots C_2 C_1$ είναι αντιστρέψιμος πίνακας. Έχω λοιπόν $CA = B$ με τον C αντιστρέψιμο.

Αν ο A είναι αντιστρέψιμος τότε και ο CA είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή, ο B είναι αντιστρέψιμος.

Έστω τώρα ότι ο B είναι αντιστρέψιμος. Από τη $B = CA$ έπεται ότι $C^{-1}B = C^{-1}(CA) = (C^{-1}C)A = I_n A = A$. Αλλά, αφού ο C είναι αντιστρέψιμος, έπεται ότι και ο C^{-1} είναι αντιστρέψιμος, άρα και ο $C^{-1}B$ (δηλαδή ο A) είναι αντιστρέψιμος.

Υπόδειξη στη 2. Αν υπολογίσετε κλιμακωτό του πίνακα θα βρείτε μια γραμμή της μορφής $\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{array}\right)$ όπου ο c είναι κάποιος μη μηδενικός αριθμός (εσείς θα βρείτε συγκεκριμένη αριθμητική τιμή). Αυτή η γραμμή αντιστοιχεί στην εξίσωση $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 = c$, που είναι προφανώς αδύνατη. Αφού μία από τις εξισώσεις του συστήματος είναι αδύνατη, έπεται ότι και το σύστημα είναι αδύνατο.

Κάποια βοηθητικά σχόλια στην 3. Όταν υπολογίσετε κλιμακωτό του πίνακα, θα πρέπει να βρείτε ότι η τάξη του είναι 3, άρα θα έχετε 3 εξαρτημένες μεταβλητές και 2 ανεξάρτητες. Σε αντίθεση με τον κλιμακωτό της άσκησης 2, τώρα καμμία γραμμή του κλιμακωτού δεν είναι της μορφής $\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{array}\right)$ με $c \neq 0$.

Κάποιο βοηθητικό παράδειγμα για τις 4 και 5. Εσείς σκεφθείτε κατ' αναλογίαν με το εξής παράδειγμα: Έστω ότι ο A είχε διάσταση 5×5, $r(A) = 3$ και U είναι κλιμακωτός του A. Η σχέση $r(A) = 3$ σημαίνει ότι ο U έχει 3 οδηγούς. Αλλά οδηγούς έχουν μόνο οι μη μηδενικές γραμμές του U, οπότε ο U έχει ακριβώς 3 μη μηδενικές γραμμές. Συνεπώς, οι υπόλοιπες δύο γραμμές του είναι μηδενικές. Αλλά οι μηδενικές γραμμές ενός κλιμακωτού είναι τελευταίες, άρα ο U είναι της μορφής

$$U = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και οι τρεις πρώτες γραμμές είναι μη μηδενικές, που σημαίνει ότι κάθε μια έχει ένα τουλάχιστον στοιχείο της μη μηδενικό και το αριστερώτερο μη μηδενικό στοιχείο κάθε γραμμής είναι ο οδηγός της.

Τώρα συλλογίζομαι ως εξής: Αν $a_1 \neq 0$, τότε ο a_1 είναι οδηγός της 1ης γραμμής, άρα τα b_1, c_1, επειδή βρίσκονται κάτω από οδηγό, πρέπει υποχρεωτικά να είναι 0. Αν $a_1 = 0$, τότε ο οδηγός της 1ης γραμμής βρίσκεται από τη 2η θέση και μετά. Ο οδηγός της 2ης γραμμής είναι δεξιώτερα του οδηγού της 1ης γραμμής, άρα από την 3η θέση και μετά και αυτό συνεπάγεται ότι $b_1 = 0$. Με ανάλογο τρόπο συμπεραίνω ότι $c_1 = 0$. Άρα, σε κάθε περίπτωση, $b_1 = c_1 = 0$. και ο U, συμπεραίνω ότι είναι της μορφής

$$U = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ 0 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ 0 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Αν $b_2 \neq 0$ τότε είναι οδηγός της 2ης γραμμής, οπότε τα στοιχεία κάτω απ' το b_2 πρέπει να είναι 0, άρα $c_2 = 0$. Αν $b_2 = 0$, τότε ο οδηγός της 2ης γραμμής είναι από την 3η θέση και μετά. Αλλά τότε ο οδηγός της 3ης γραμμής πρέπει να είναι από την 4η θέση και μετά, άρα $c_2 = 0$, οπότε

$$U = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ 0 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ 0 & 0 & c_3 & c_4 & c_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

δηλαδή ο U είναι άνω τριγωνικός με τα $2(= 5 - 3 = n - r)$ τελευταία στοιχεία της διαγωνίου 0.

Υπόδειξη και σχόλιο στην 5. Δεν περιμένω να διατυπώσετε αυστηρή απόδειξη. Αρκεί να το καταλάβετε με παράδειγμα. Φροντίστε να έχετε καταλάβει το προηγούμενο «βοηθητικό παράδειγμα για τις 4 και 5». Έστω π.χ. $m = 4, n = 5$ και $r(A) = 2$. Καθώς κάνομε τη διαδικασία να βρούμε κλιμακωτό, έστω U', για τον B, θα βρούμε συγχρόνως και κλιμακωτό, έστω U, του A. Αφού $r(A) = 2$, ο κλιμακωτός του A που θα βρούμε, θα είναι της μορφής

$$\text{κλιμακωτός του } A = U = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ 0 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

με ένα τουλάχιστον από τα a_i μη μηδενικό και ένα τουλάχιστον από τα b_i μη μηδενικό. Τότε, ο κλιμακωτός του $B = (A|\mathbf{b})$ θα είναι

$$\text{κλιμακωτός του } B = U' = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & c_1 \\ 0 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_4 \end{array} \right).$$

Τώρα συλλογίζομαι ως εξής: Αν $c_3 \neq 0$, τότε c_3 είναι οδηγός του U' (όχι του U!), άρα $c_4 = 0$. Στην περίπτωση αυτή οι οδηγοί του U' είναι 3 ενώ οι οδηγοί του U είναι 2. Δηλαδή $r(B) = r(A) + 1$. Αν $c_3 = 0$ τότε και $c_4 = 0$, διότι, σε κλιμακωτό πίνακα, μη μηδενική γραμμή δεν μπορεί να είναι κάτω από μηδενική γραμμή. Στην περίπτωση αυτή, λοιπόν, οι δύο τελευταίες γραμμές του U' είναι μηδενικές, οπότε ο U' έχει τους ίδιους οδηγούς με τον U, άρα $r(B) = 2 = r(A)$.