ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Εαρινό Εξάμηνο 2018

Διδάσκοντες: Π. Πάφιλος - Ν.Γ. Τζανάκης

Ύλη που διδάχθηκε την εβδομάδα 23-27 Απριλίου

1. Αν $x, y \in \mathbb{C}^n$ (θεωρούμε τα x, y ως στήλες) τότε $\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}^n} = \bar{y}^T \cdot x$, όπου στο αριστερό μέλος εννοείται το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο και στο δεξιό μέλος η πράξη είναι πολλαπλασιασμός πινάκων (γραμμή $1 \times n$ επί στήλη $n \times 1$).

2. Αν $x, y \in \mathbb{C}^n$ (θεωρούμε τα x, y ως στήλες) και A είναι $n \times n$ πίνακας (μιγαδικός, εν γένει), τότε, με χρήση του (1) προκύπτουν οι εξής σχέσεις:

$$\langle x, Ay\rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle A^* x, y\rangle_{\mathbb{C}^n}, \quad \langle Ax, y\rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle x, A^* y\rangle_{\mathbb{C}^n},$$

όπου A^* είναι ο αντιστροφο-αντίθετος του A.

3. **Πρόταση 1**. *Έστω n-διάστατος $\mathbb{C}$-διανυσματικός χώρος V, εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο, το οποίο συμβολίζομε $\langle\ ,\ \rangle_V$ και τελεστής L του V. Έστω $\mathcal{B}$ ορθοκανονική βάση του V και για κάθε $v \in V$ συμβολίζομε –ως συνήθως– με $v_{\mathcal{B}}$ τη στήλη συντεταγμένων του v. Τότε ισχύει*

$$\langle u, w\rangle_V = \langle u_{\mathcal{B}}, w_{\mathcal{B}}\rangle_{\mathbb{C}^n}, \quad \forall u, w \in V,$$

όπου στο δεξιό μέλος το εσωτερικό γινόμενο είναι το σύνηθες του $\mathbb{C}^n$, όπως στα (1) και (2)

4. Κρατώντας της υποθέσεις της Πρότασης 1, θέτομε $A = {}_{\mathcal{B}}L_{\mathcal{B}}$. Μας είναι ήδη γνωστή η σχέση $L(v)_{\mathcal{B}} = ({}_{\mathcal{B}}L_{\mathcal{B}})v_{\mathcal{B}} = Av_{\mathcal{B}}$, οπότε, από αυτή τη σχέση και την Πρόταση 1 έχομε

$$\langle L(u), w\rangle_V = \langle L(u)_{\mathcal{B}}, w_{\mathcal{B}}\rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle Au_{\mathcal{B}}, w_{\mathcal{B}}\rangle_{\mathbb{C}^n}.$$

Ανάλογα, αλλά κάνοντας επιπλέον χρήση και του (2), έχομε

$$\langle u, L(w)\rangle_V = \langle u_{\mathcal{B}}, L(w)_{\mathcal{B}}\rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle u_{\mathcal{B}}, Aw_{\mathcal{B}}\rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle A^* u_{\mathcal{B}}, w_{\mathcal{B}}\rangle_{\mathbb{C}^n}.$$

Από αυτές τις σχέσεις έπεται ότι $\langle L(u), w\rangle_V = \langle u, L(w)\rangle_V$ αν και μόνο αν $\langle Au_{\mathcal{B}}, w_{\mathcal{B}}\rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle A^* u_{\mathcal{B}}, w_{\mathcal{B}}\rangle_{\mathbb{C}^n}$ για όλα τα $u, w \in V$. Η τελευταία ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $A = A^*$. Έτσι αποδείχθηκε ότι ο τελεστής L είναι ερμιτιανός αν και μόνο αν ο πίνακας A είναι ερμιτιανός.

Με ανάλογο τρόπο αποδείξαμε ότι ο τελεστής L είναι ορθομοναδιαίος αν και μόνο αν ο πίνακας A είναι ορθομοναδιαίος, οπότε αποδείξαμε το εξής:

Θεώρημα 2. *Έστω n-διάστατος $\mathbb{C}$-διανυσματικός χώρος V, εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο, το οποίο συμβολίζομε $\langle\ ,\ \rangle_V$ και τελεστής L του V. Έστω $\mathcal{B}$ ορθοκανονική βάση του V και $A = {}_{\mathcal{B}}L_{\mathcal{B}}$. Τότε ισχύουν τα εξής*

(α΄) Ο τελεστής L είναι ερμιτιανός αν και μόνο αν ο πίνακας A είναι ερμιτιανός.

(β΄) Ο τελεστής L είναι ορθομοναδιαίος αν και μόνο αν ο πίνακας A είναι ορθομοναδιαίος.

5. Αποδείξαμε και το εξής:

Θεώρημα 3. (α′) *Έστω n-διάστατος $\mathbb{C}$-διανυσματικός χώρος V, εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο και L ερμιτιανός τελεστής του V. Τότε υπάρχει βάση του V αποτελούμενη από ιδιοδιανύσματα του L.*

(β′) *Κάθε $n \times n$ ερμιτιανός πίνακας A διαγωνιοποιείται. Δηλαδή, υπάρχει διαγώνιος πίνακας D και αντιστρέψιμος πίνακας P, τέτοιοι ώστε $A = PDP^{-1}$. Επιπλέον, τα στοιχεία στη διαγώνιο του D είναι πραγματικοί αριθμοί, ιδιοτιμές του A.*