ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Εαρινό Εξάμηνο 2018

Διδάσκοντες: Π. Πάφιλος - Ν.Γ. Τζανάκης

Ασκήσεις για την εβδομάδα 30 Απριλίου - 4 Μαΐου

1. Έστω ότι $a, b \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$ και ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1+ai & 1+3i \\ z & 10+bi \end{pmatrix}$ είναι ερμιτιανός. Υπολογίστε τα διανύσματα του $\mathbb{C}^2$ νόρμας 11 (ως προς το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{C}^2$), τα οποία είναι ορθογώνια στον χώρο $\mathcal{R}(A^T)$.

2. Σ' αυτή την άσκηση, ο $\mathbb{R}^n$ θεωρείται εφοδιασμένος με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο. Πριν προχωρήστε στη λύση, παρατηρήστε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, που το βλέπουμε ως στήλη, το $x \cdot x^T$ είναι $n \times n$ πίνακας (= γινόμενο της $n \times 1$ στήλης x επί την $1 \times n$ γραμμή x^T). Έστω μοναδιαίου μήκους διάνυσμα $u \in \mathbb{R}^n$.
   (α′) Αποδείξτε ότι $(u \cdot u^T)x = \langle u, x\rangle u$.
   (β′) Έστω $A = I_n - 2u \cdot u^T$. Αποδείξτε ότι ο A είναι ορθογώνιος και συμμετρικός και, συνεπώς, $A^2 = I_n$.

3. Δίδεται διάνυσμα $v \neq 0$ του $\mathbb{R}^n$ με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο. Περιγράψτε όλα τα διανύσματα w του $\mathbb{R}^n$ που έχουν την ιδιότητα, τα διανύσματα $v + w, v - w$ να είναι κάθετα. Στις περιπτώσεις $n = 2, 3$ ποια είναι η γεωμετρική περιγραφή του συνόλου αυτών των w;

4. Εάν A, B είναι ερμιτιανοί πίνακες της ίδιας διάστασης, αποδείξτε τα εξής:
   (α′) Ο πίνακας $A + B$ είναι ερμιτιανός.
   (β′) Εαν $AB = BA$, τότε και ο AB είναι ερμιτιανός.

5. Για καθέναν από τους παρακάτω πίνακες A, κάνετε τα εξής: Υπολογίστε μία ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$, της οποίας τα διανύσματα να είναι ιδιοδιανύσματα του A. Θεωρήστε τον πίνακα Q με στήλες τις συντεταγμένες αυτών των ιδιοδιανυσμάτων. Εξηγήστε, δίχως πράξεις, γιατί ο Q είναι ορθογώνιος. Εξηγήστε γιατί $A = QDQ^T$, όπου D είναι διαγώνιος πίνακας, με στοιχεία στη διαγώνιο τις ιδιοτιμές του A. Για να διευκολυνθείτε στις πράξεις σας δίδονται τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα των πινάκων.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{χαρακτηριστικό πολυώνυμο } -(x-3)^2(x+3)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{χαρακτηριστικό πολυώνυμο } -(x-2)^2(x+1)$$

6. Έστω V μιγαδικός διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle\, ,\rangle$ και L τελεστής του V, με την ιδιότητα $\langle L(v), v\rangle = 0$ για κάθε $v \in V$. Αποδείξτε τα εξής:

   (α΄) Η μοναδική ιδιοτιμή του L είναι το 0.

   (β΄) Έστω v ιδιοδιάνυσμα του L και $U = \langle v\rangle^{\perp}$. Αποδείξτε ότι $\langle L(u), v\rangle = 0$ για κάθε $u \in U$. Από αυτό συμπεράνατε ότι ο U είναι υπόχωρος αναλλοίωτος από τον L.

   Υπόδειξη: Αν $u \in U$, εφαρμόστε την ιδιότητα του L που αναφέρεται στην εκφώνηση, για το διάνυσμα $u + v$.

   (γ΄) Χρησιμοποιείστε το (β΄) και αποδείξτε επαγωγικά επί του $\dim(V)$ ότι ο L είναι ο μηδενικός τελεστής.

   (δ΄) Δείξτε, με αντιπαράδειγμα, ότι το (γ΄) δεν ισχύει σε πραγματικό χώρο με εσωτερικό γινόμενο. Πιο συγκεκριμένα, θεωρήστε ως V τον $\mathbb{R}^2$ εφοδιασμένο με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο και βρείτε μη μηδενικό τελεστή L του $\mathbb{R}^2$ με την ιδιότητα $\langle L(v), v\rangle = 0$ για κάθε $v \in \mathbb{R}^2$.

7. (α΄) Έστω 3×3 πίνακας A (μιγαδικός εν γένει). Δείξτε ότι, στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο, έστω $f(x)$ του A, ο συντελεστής του x^3 ισούται με -1. Συνεπώς, $f(x) = -(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)(x - \lambda_3)$, όπου $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ είναι οι ιδιοτιμές του A (όχι κατ' ανάγκη διαφορετικές). Συμπεράνατε ότι ο σταθερός όρος του $f(x)$ ισούται με $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$. Απ' την άλλη, χρησιμοποιώντας τον ορισμό του χαρακτηριστικού πολυωνύμου δείξτε ότι ο σταθερός όρος του $f(x)$ ισούται με $\det(A)$, οπότε συμπεράνατε ότι $\det(A) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$.

   (β΄) Δείξτε ότι για κάθε πραγματικό ορθογώνιο 3×3 πίνακα A με θετική ορίζουσα υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα v_0 με $Av_0 = v_0$.

   Υπόδειξη. Θυμηθήτε ότι οι ιδιοτιμές κάθε ερμιτιανού (άρα και κάθε συμμετρικού) πίνακα έχουν μέτρο 1. Θυμηθήτε ότι κάθε πραγματικό πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα. Συνδυάστε αυτά τα δύο και συμπεράνατε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A, έστω $f(x)$ έχει ρίζα $\lambda_1 \in \{-1, +1\}$. Αν $\lambda_1 = 1$, τότε η άσκηση αποδείχθηκε (γιατί;). Αν $\lambda_1 = -1$ και λ_2, λ_3 είναι οι άλλες δύο ρίζες του $f(x)$, τότε, κάνοντας χρήση του (α΄), συμπεράνατε ότι $\lambda_2\lambda_3 < 0$. Δείξτε ότι αυτό συνεπάγεται ότι $\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ και ένα από αυτά ισούται με $+1$.

   (γ΄) Εξηγήστε γιατί το συμπέρασμα του (β΄) σημαίνει ότι υπάρχει ευθεία του $\mathbb{R}^3$, η οποία κατά τον μετασχηματισμό $x \mapsto Ax$ του $\mathbb{R}^3$ παραμένει σταθερή κατά σημείο (δηλαδή,κάθε σημείο της ευθείας μετασχηματίζεται (απεικονίζεται) στον εαυτό του.

   Σημείωση. Πληροφοριακά αναφέρουμε ότι ο μετασχηματισμός $x \mapsto Ax$ του $\mathbb{R}^3$ παριστάνει στροφή του χώρου γύρω από τον άξονα, ο οποίος ορίζεται από το διάνυσμα v_0.

Επαναληπτικές ασκήσεις

1. Δείξτε ότι τα διανύσματα $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ του $\mathbb{R}^n$ είναι ανεξάρτητα, τότε και μόνον όταν ο $k \times k$ πίνακας με στοιχεία $a_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$ είναι αντιστρέψιμος. Το $\langle\, , \rangle$ είναι το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^n$.

2. Έστω n-διάστατος διανυσματικός χώρος V με εσωτερικό γινόμενο $\langle\, , \rangle$ και $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ βάση του V. Δείξτε ότι το διάνυσμα $x \in V$ είναι πλήρως ορισμένο, τότε και μόνον τότε, όταν είναι γνωστά τα $\langle v_i, x \rangle$ για κάθε $i = 1, ..., n$.