ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Εαρινό Εξάμηνο 2018

Διδάσκοντες: Π. Πάφιλος - Ν.Γ. Τζανάκης

Διαγωνιοποίηση – Τριγωνοποίηση

1 Διαγωνιοποίηση συμμετρικού πίνακα

Πρόβλημα. *Έστω ο συμμετρικός πίνακας*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Να υπολογισθεί ορθογώνιος πίνακας Q, τέτοιος ώστε $Q^T AQ = D$ διαγώνιος.

Λύση. Με τον συνήθη τρόπο υπολογίζουμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι $-(x-2)^2(x+1)$. Άρα οι ιδιοτιμές του A είναι 2 (διπλή) και -1 (απλή). Υπολογίζουμε βάσεις για τους αντίστοιχους ιδιοχώρους και βρίσκουμε:

ιδιοτιμή	βάση του αντίστοιχου ιδιοχώρου
-1	$(-1, 1, 1)$
2	$(1, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$

Από τη θεωρία είναι γνωστό ότι, διανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές, είναι ορθογώνια· και πράγματι βλέπουμε ότι το $(-1, 1, 1)$ είναι ορθογώνιο προς τα $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$.

Ακολουθώντας ό,τι είπαμε στη θεωρία, θέλουμε πρώτα να υπολογίσουμε ορθογώνια βάση του $\mathbb{R}^3$ αποτελούμενη από ιδιοδιανύσματα. Τα τρία διανύσματα του πίνακα είναι μεν ιδιοδιανύσματα, αλλά δεν αποτελούν ορθογώνια βάση, αφού τα $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$ που παράγουν τον ιδιόχωρο, έστω W, της ιδιοτιμής 2, δεν είναι μεταξύ τους ορθογώνια. Παρατηρούμε πάντως ότι W είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του $\langle v_1 \rangle$.

Ακολουθούμε την εξής διαδικασία: Επιλέγουμε ένα από τα τρία ιδιοδιανύσματα, το οποίο συμβολίζουμε με v_1. Αν και δεν είναι απαραίτητο, είναι προτιμότερο να επιλέξουμε αυτό, που αντιστοιχεί στην απλή ιδιοτιμή[1]. Αυτό που μας μένει να κάνουμε είναι να βρούμε μια ορθογώνια βάση του W (στο τέλος θα γίνει η κανονικοποίηση).

Έστω $v_2 = (1, 0, 1)$, $v_3 = (1, 1, 0)$. Ακολουθώντας τη διαδικασία Gram-Schmidt (ένα βήμα μόνο μας χρειάζεται εδώ), παίρνουμε

$$v_2' = v_2 = (1, 0, 1), \quad v_3' = v_3 - \frac{\langle v_3, v_2' \rangle}{\| v_2' \|^2} \cdot v_2' = \frac{1}{2}(1, 2, -1).$$

[1] Το γιατί είναι προτιμότερη αυτή η επιλογή, το εξηγούμε στο τέλος.

Έτσι πετύχαμε να είναι τα v_2', v_3' ιδιοδιανύσματα (αφού ανήκουν στον W, που είναι ο ιδιόχωρος της ιδιοτιμής 2) και, επιπλέον, είναι ορθογώνια. Έτσι παίρνουμε τη βάση $\{v_1, v_2' = v_2, v_3'\}$, που έχει τη διπλή ιδιότητα, να αποτελείται από ιδιοδιανύσματα και να είναι ορθογώνια. Τέλος, κανονικοποιώντας την ορθογώνια βάση, καταλήγουμε στην *ορθοκανονική* βάση

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1),\ \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)\right\}.$$

Ο ζητούμενος πίνακας Q είναι αυτός, που έχει ως στήλες του τα παραπάνω διανύσματα και ο D έχει στη διαγώνιό του, με τη σειρά, από πάνω προς τα κάτω, τα $-1, 2, 2$.

Παρατήρηση. Αν στον πίνακα Q τοποθετήσουμε τα διανύσματα με διαφορετική σειρά, π.χ. το πρώτο διάνυσμα να γίνει τρίτο, τότε στη διαγώνιο του D θα εμφανίζονται τα $2, 2, -1$.

Ασκήσεις. Ακολουθώντας την παραπάνω διαδικασία για καθέναν από τους παρακάτω πίνακες A, υπολογίστε ορθογώνιο πίνακα Q και διαγώνιο πίνακα D, τέτοιους ώστε $Q^T A Q = D$. Για διευκόλυνση δίδεται το χαρακτηριστικό πολυώνυμο κάθε πίνακα.

A	χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A.
$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$-(x-1)^2(x-4)$
$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$-x(x-3)^2$
$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$-(x+3)(x-3)^2$

Σημαντικό! Επιστρέφοντας στο λυμένο παράδειγμα, τί θα συνέβαινε αν για v_1 επιλέγαμε ένα από τα ιδιοδιανύσματα, που αντιστοιχούν στη διπλή ιδιοτιμή;

Έστω ότι επιλέγαμε $v_1 = (1,0,1)$. Ακολουθώντας τη διαδικασία, που είδαμε στη θεωρία, πρέπει να θεωρήσουμε τον υπόχωρο $W = \langle v_1 \rangle^\perp$. Μια βάση του W είναι η $\{v_2 = (-1,0,1),\ v_3 = (0,1,0)\}$. Μάλλον συμπτωματικά, τα v_2, v_3 είναι ορθογώνια, αλλά δεν είναι βέβαιο ότι είναι και ιδιοδιανύσματα! Από τη θεωρία ξέρουμε ότι υπάρχει βάση του W αποτελούμενη από ιδιοδιανύσματα του A (ή, ισοδύναμα, ιδιοδιανύσματα του τελεστή L, που ορίζεται από τη σχέση $L(x) = Ax$), αλλά πώς θα την υπολογίσουμε; Θα χρησιμοποιήσουμε την εξής πρόταση, που αποδεικνύεται στη θεωρία:

Πρόταση. *Έστω $\mathbb{C}$-διανυσματικός χώρος V, L τελεστής του V και $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ βάση του V, οπότε κάθε $w \in V$ γράφεται $w = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n$ με $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{C}^n$. Αν $B = {}_{\mathcal{B}} L_{\mathcal{B}}$, τότε* ισχύει το εξής: Το $w = c_1v_1 + \cdots + c_nv_n$ είναι ιδιοδιάνυσμα του L, που αντιστοιχεί σε κάποια συγκεκριμένη ιδιοτιμή λ του L, αν και μόνο αν το $(c_1, \dots, c_n)$ είναι ιδιοδιάνυσμα του πίνακα B, που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.

Πώς θα εφαρμόσουμε αυτή την πρόταση στο συγκεκριμένο παράδειγμά μας. Εδώ έχουμε ένα διανυσματικό χώρο W και τη βάση του $C = \{v_2, v_3\}$, όπως παραπάνω. Υπολογίζουμε

$$L(v_2) = (0, -2, 0) = 0 \cdot v_2 - 2 \cdot v_3, \quad L(v_3) = (1, 1, -1) = -v_2 + v_3,$$

άρα $B = {}_C L_C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Οι ιδιοτιμές του B είναι $-1, 2$ και οι αντίστοιχοι ιδιόχωροι παράγονται, αντιστοίχως, από τα διανύσματα $(1, 1)$ και $(-1, 2)$. Συνεπώς, από την πρόταση, δύο ιδιοδιανύσματα του L, που ανήκουν στον W είναι τα $v_2' = v_2 + v_3 = (-1, 1, 1)$ (αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή -1) και $v_3' = -v_2 + 2v_3 = (1, 2, -1)$ (αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 2). Τα v_2', v_3' είναι ορθογώνια επειδή αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές, οπότε η βάση $\{v_1 = (1, 0, 1),\ v_2' = (-1, 1, 1),\ v_3' = (1, 2, -1)\}$ είναι ορθογώνια και αποτελείται από ιδιοδιανύσματα, που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $2, -1, 2$. Κανονικοποιώντας αυτή τη βάση, παίρνουμε τη

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1),\ \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1),\ \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1) \right\}.$$

Ο ζητούμενος πίνακας Q είναι αυτός, που έχει ως στήλες του τα παραπάνω διανύσματα και ο D έχει στη διαγώνιό του, με τη σειρά, από πάνω προς τα κάτω, τα $2, -1, 2$.
Παρατηρήστε ότι αυτή η βάση είναι ίδια με αυτήν που βρήκαμε με τον πρώτο τρόπο λύσης, αλλά με διαφορετική διάταξη των στοιχείων της, οπότε και στον διαγώνιο πίνακα, τα διαγώνια στοιχεία αλλάζουν σειρά. Όμως, για το ίδιο αποτέλεσμα απαιτήθηκε πολύ μεγαλύτερος κόπος!

2 Τριγωνοποίηση

Όταν ο πίνακας δεν είναι ερμιτιανός (ειδικώτερα, αν είναι πραγματικός και μη συμμετρικός) αυτό που, με βεβαιότητα, μπορούμε να πετύχουμε είναι όχι η διαγωνιοποίηση, αλλά η τριγωνοποίησή του.

Πρόβλημα. *Έστω ο πίνακας*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Να υπολογισθεί ορθογώνιος πίνακας Q, τέτοιος ώστε $Q^{-1}AQ = T$ άνω τριγωνικός.

Λύση. Με τον συνήθη τρόπο υπολογίζουμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι $-(x-1)^2(x-2)$. Άρα οι ιδιοτιμές του A είναι 1 (διπλή) και 2 (απλή). Υπολογίζουμε βάσεις για τους αντίστοιχους ιδιοχώρους και βρίσκουμε:

ιδιοτιμή	βάση του αντίστοιχου ιδιοχώρου
2	$(2, -1, 3)$
1	$(1, -1, 1)$

Παρατηρήστε ότι, η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής 1 (=1) είναι < από την αλγεβρική της πολλαπλότητα (=2).

Ακολουθώντας τη θεωρία, επιλέγουμε ένα από τα ιδιοδιανύσματα και το συμβολίζουμε v_1. Αντίθετα με την περίπτωση της διαγωνιοποίησης, τώρα η επιλογή της ιδιοτιμής πολλαπλότητας 1 δεν είναι, κατ' ανάγκη, η πιο καλή. Δυστυχώς δεν μπορούμε να ξέρουμε εκ των προτέρων. . . . Θα δώσουμε λύση και με τις δύο επιλογές, ακολουθώντας τα βήματα της θεωρίας. Και πάλι, θα θεωρήσουμε τον τελεστή του $\mathbb{R}^3$, που ορίζεται από τη σχέση $L(x) = Ax$. Σύμφωνα με τη θεωρία, πρέπει να κατασκευάσουμε βάση $\mathcal{B}$ του $\mathbb{R}^3$, ως προς την οποία ο πίνακας του L να είναι άνω τριγωνικός.

Πρώτη επιλογή: $v_1 = (2, -1, 3)$. Θεωρούμε τον $W = \langle v_1 \rangle^{\perp}$, μία βάση του οποίου υπολογίζουμε ότι είναι η $\{w_1 = (-3, 0, 2),\ w_2 = (1, 2, 0)\}$. Σύμφωνα με τη θεωρία, στον W ορίζεται ο τελεστής M, μέσω της σχέσεως $M(w) = p(L(w))$, όπου $p : \mathbb{R}^3 \to W$ είναι η απεικόνιση προβολής του $\mathbb{R}^3$ στον W. Υπολογίζουμε τα $M(w_1), M(w_2)$:

$$L(w_1) = (-1, -5, 1) = \frac{3}{7} v_1 - \frac{1}{7} w_1 - \frac{16}{7} w_2 \qquad \text{άρα} \quad M(w_1) = -\frac{1}{7} w_1 - \frac{16}{7} w_2.$$

$$L(w_2) = (3, 3, 5) = \frac{9}{7} v_1 + \frac{4}{7} w_1 + \frac{15}{7} w_2 \qquad \text{άρα} \quad M(w_2) = -\frac{4}{7} w_1 + \frac{15}{7} w_2.$$

Συνεπώς, αν θεωρήσουμε τη βάση $C = \{w_1, w_2\}$ του W, τότε $C = {}_C M_C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} \\ -\frac{16}{7} & \frac{15}{7} \end{pmatrix}$.

Μοναδική ιδιοτιμή του πίνακα C είναι η 1, με αντίστοιχο ιδιόχωρο παραγόμενο από το ιδιοδιάνυσμα $(1, 2)$. Άρα, από την πρόταση της σελ. 2, το $w_1' = w_1 + 2w_2 = (-1, 4, 2)$ είναι ιδιοδιάνυσμα του M (όχι, όμως και του L!) και αυτό, σύμφωνα με τη θεωρία, επιλέγουμε ως δεύτερο διάνυσμα για τη βάση $\mathcal{B}$. Ως τρίτο διάνυσμα w_2' μπορούμε να πάρουμε οποιοδήποτε διάνυσμα γραμμικώς ανεξάρτητο από τα v_1, w_1'. Για παράδειγμα, $w_2' = w_2 = (1, 2, 0)$. Συνεπώς, η ζητούμενη βάση είναι

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (2, -1, 3),\ w_1' = (-1, 4, 2),\ w_2' = (1, 2, 0)\}$$

και ο ζητούμενος πίνακας Q έχει στήλες τα παραπάνω διανύσματα. Υπολογίζεται τώρα ότι

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} & \frac{3}{14} \\ 0 & 1 & -\frac{8}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Δεύτερη επιλογή: $v_1 = (1, -1, 1)$. Θεωρούμε τον $W = \langle v_1 \rangle^{\perp}$, μία βάση του οποίου υπολογίζουμε ότι είναι η $\{w_1 = (-1, 0, 1),\ w_2 = (1, 1, 0)\}$. Σύμφωνα με τη θεωρία, στον W ορίζεται ο τελεστής M, μέσω της σχέσεως $M(w) = p(L(w))$, όπου $p : \mathbb{R}^3 \to W$ είναι η απεικόνιση προβολής του $\mathbb{R}^3$ στον W. Υπολογίζουμε τα $M(w_1), M(w_2)$:

$$L(w_1) = (0, -2, 1) = v_1 - w_2 \qquad \text{άρα} \quad M(w_1) = -w_2.$$

$$L(w_2) = (2, 2, 3) = v_1 + 2w_1 + 3w_2 \qquad \text{άρα} \quad M(w_2) = 2w_1 + 3w_2.$$

Συνεπώς, αν θεωρήσουμε τη βάση $C = \{w_1, w_2\}$ του W, τότε $C = {}_C M_C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Αυτή τη φορά ο πίνακας C έχει δύο ιδιοτιμές· τη 2, με ιδιόχωρο παραγόμενο από το ιδιοδιάνυσμα $(1, 1)$ και την 1 με ιδιόχωρο παραγόμενο από το ιδιοδιάνυσμα $(2, 1)$. Άρα, από την πρόταση της σελ. 2, το $w_1' = w_1 + w_2 = (0, 1, 1)$ είναι ιδιοδιάνυσμα του M και αυτό, σύμφωνα με τη θεωρία, επιλέγουμε ως δεύτερο διάνυσμα για τη βάση $\mathcal{B}$. Ως τρίτο διάνυσμα w_2' μπορούμε να πάρουμε οποιοδήποτε διάνυσμα γραμμικώς ανεξάρτητο από τα v_1, w_1', αλλά αφού τώρα έχουμε και δεύτερο ιδιοδιάνυσμα του M, το $w_2' = 2w_1 + w_2 = (-1, 1, 2)$, καλόν είναι να επιλέξουμε αυτό ως τρίτο διάνυσμα της ζητούμενης βάσης $\mathcal{B}$.[2] Άρα, σ' αυτή την περίπτωση,

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (1, -1, 1),\ w_1' = (0, 1, 1),\ w_2' = (-1, 1, 2)$$

και ο ζητούμενος πίνακας Q έχει στήλες τα παραπάνω διανύσματα. Υπολογίζεται τώρα ότι

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Δηλαδή, η δεύτερη επιλογή μας αποδείχθηκε πολύ πιο επιτυχής από άποψη ευκολίας πράξεων και κομψότητας του τριγωνικού πίνακα.

> **Ασκήσεις**. Ακολουθώντας την παραπάνω διαδικασία για καθέναν από τους παρακάτω πίνακες A, υπολογίστε αντιστρέψιμο πίνακα Q τέτοιον ώστε ο πίνακας $Q^{-1}AQ$ να είναι άνω τριγωνικός, τον οποίο και υπολογίσετε. Για διευκόλυνση δίδεται το χαρακτηριστικό πολυώνυμο κάθε πίνακα και προτείνεται η ‘‘βολική’’ ιδιοτιμή μέσω της οποίας θα επιλέξετε το v_1.

[2] Τονίζουμε για άλλη μια φορά, ότι τα ιδιοδιανύσματα του M δεν είναι, κατ' ανάγκη, ιδιοδιανύσματα και του L.

A	χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A	για v_1 επιλέξτε ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην
$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$-x(x-2)^2$	απλή ιδιοτιμή
$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$-x(x-2)^2$	διπλή ιδιοτιμή
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$-x^2(x-1)$	διπλή ιδιοτιμή