

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Εαρινό Εξάμηνο 2018

Διδάσκοντες: Π. Πάφιλος - Ν.Γ. Τζανάκης

Ασκήσεις για το εργαστήριο της Τετάρτης 28 Μαρτίου

1. Έστω διανυσματικός χώρος V πάνω από το \mathbb{R} ή το \mathbb{C} , εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο. Δείξτε ότι ένα διάνυσμα $v \in V$ είναι ορθογώνιο προς κάθε διάνυσμα του V αν και μόνο αν $v = 0$.
2. Έστω διανυσματικός χώρος V πάνω από το \mathbb{R} ή το \mathbb{C} , εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο. Δείξτε ότι, αν τα διανύσματα v_1, \dots, v_n είναι μη μηδενικά και ανά δύο κάθετα, τότε είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.
3. Στο \mathbb{R}^3 , δείξτε ότι η σχέση $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$ (όπου $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$) ορίζει εσωτερικό γινόμενο, ενώ η σχέση $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 - 3x_3y_3$ δεν ορίζει εσωτερικό γινόμενο.
4. Στον \mathbb{R}^n δίδονται δύο εσωτερικά γινόμενα $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_1$ και $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_2$ (όπου $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$). Δείξτε ότι αν $\lambda > 0$, τότε το $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_3 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_1 + \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_2$ είναι, επίσης, εσωτερικό γινόμενο.
5. Έστω διανυσματικός χώρος V εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ και X υπόχωρος του V .
(α') Έστω $Y = \{y \in V : \langle y, x \rangle = 0 \ \forall x \in X\}$. Δείξτε ότι το Y είναι υπόχωρος του V και $Y \cap X = \{0\}$. Ο Y λέγεται ορθογώνιο συμπλήρωμα του X στον V .
(β') Δείξτε ότι ένα διάνυσμα $y \in V$ είναι ορθογώνιο σε κάθε $x \in X$, αν και μόνο αν το y είναι ορθογώνιο σε κάθε διάνυσμα μιας βάσης του X .
6. Θεωρούμε τον υπόχωρο V του \mathbb{R}^3 , που παράγεται από τα διανύσματα $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 1, 0)$. Ποιο είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του V : (α') Αν ο \mathbb{R}^3 είναι εφοδιασμένος με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο και (β') Αν ο \mathbb{R}^3 είναι εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο της ασκήσεως 3.
7. Θεωρούμε τον χώρο $C[0, 1]$ των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων μιας μεταβλητής, με το εσωτερικό γινόμενο, που ορίζεται από τη σχέση $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$.
(α') Υπολογίστε το $\langle f, g \rangle$ όταν $f(x) = 2x + 1$ και $g(x) = 3x - 2$.
(β') Δείτε ότι οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = 4x - 3$ είναι ορθογώνιες.
(γ') Βρείτε μια συνάρτηση ορθογώνια προς την $f(x) = 6x + 12$.