ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Εαρινό Εξάμηνο 2018

Διδάσκοντες: Π. Πάφιλος - Ν.Γ. Τζανάκης

Ασκήσεις της εβδομάδας 19 - 23 Μαρτίου

1. Για καθέναν από τους παρακάτω πίνακες A, B, C, D, υπολογίστε τις ιδιοτιμές και, για κάθε ιδιοτιμή, μία βάση του αντστοίχου ιδιοχώρου:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 16 \\ 0 & 3/4 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \ ab \neq 0$$

2. Έστω η βάση $\mathcal{B} = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$ του $\mathbb{R}^3$. Αν τα διανύσματα της $\mathcal{B}$ είναι ιδιοδιανύσματα κάποιου τελεστή L του $\mathbb{R}^3$, που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές τις 1,2,3, τότε υπολογίστε τον πίνακα ${}_{\mathcal{E}}L_{\mathcal{E}}$, όπου $\mathcal{E}$ είναι η στάνταρ βάση του $\mathbb{R}^3$.

3. Δώστε παράδειγμα που δείχνει ότι οι ιδιοτιμές ενός πίνακα μπορεί να αλλάξουν, όταν πολλαπλάσιο μιάς γραμμής προστεθεί σε μιαν άλλη.

4. Έστω ότι ο 3×3 πίνακας A έχει τις ιδιοτιμές 0,1,2 με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα v_0, v_1, v_2. Υπολογίστε (συναρτήσει των v_0, v_1, v_2) βάσεις του μηδενόχωρου και του χώρου στηλών του A. Λύστε την εξίσωση $Ax = v_1 + v_2$ και δείξτε ότι η εξίσωση $Ax = v_0$ δεν έχει λύση.

5. Έστω L τελεστής του 3-διάστατου $\mathbb{C}$-διανυσματικού χώρου V και οι αριθμοί 0,1,2 είναι ιδιοτιμές για τον L. Έστω, επίσης, ότι τα $v_0, v_1, v_2 \in V$ είναι ιδιοδιανύσματα του L γι' αυτές τις ιδιοτιμές, αντιστοίχως.
(α΄) Αποδείξτε ότι $\mathrm{Ker}(L) = \langle v_0 \rangle$.
(β΄) Περιγράψτε το σύνολο $L^{-1}(v_1 + v_2)$.
(γ΄) Αποδείξτε ότι $v_0 \notin \mathrm{Im}(L)$.

6. Έστω ότι $\dim(V) = n$ και ο τελεστής L του V έχει n διαφορετικές *μη μηδενικές* ιδιοτιμές $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Αποδείξτε ότι ο L είναι ισομορφισμός του V (ένας ισομορφισμός του διανυσματικού χώρου V στον εαυτό του λέγεται και *αυτομορφισμός* του V).

   Υπόδειξη. Έστω $v_1, \ldots, v_n$ ιδιοδιανύσματα του L, για τις ιδιοτιμές $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, αντιστοίχως. Παρατηρήστε ότι το σύνολο $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι βάση του V. Για να είναι απεικόνιση 1-1 ο L, πρέπει και αρκεί να είναι $\mathrm{Ker}(L) = \{0\}$. Έστω $u \in \mathrm{Ker}(L)$. Γράψτε το u ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων της βάσης $\mathcal{B}$ και αποδείξτε ότι όλοι οι συντελεστές είναι 0, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $u \in \ker(L)$. Για να δείξετε ότι η απεικόνιση L είναι 'επί', θυμηθήτε ότι $\dim\ker(L) + \dim\mathrm{im}(L) = \ldots$.

7. Δείξτε ότι ο $n \times n$ πίνακας αντιστρέφεται, τότε και μόνον τότε, όταν το 0 δεν είναι ιδιοτιμή του.

8. Ο 4×4 πίνακας A έχει όλα τα στοιχεία του ίσα με 1. Βρείτε τις ιδιοτιμές του και διαπιστώστε ότι, μία από αυτές, είναι το 0. Ποιά είναι η αλγεβρική πολλαπλότητα αυτής της ιδιοτιμής και ποια η γεωμετρική της πολλαπλότητα;

9. Έστω ότι ο αυτομορφισμός L του $\mathbb{C}^2$ έχει δύο διαφορετικές μη μηδενικές ιδιοτιμές, λ_1, λ_2 και b_1, b_2 είναι ιδιοδιανύσματα των λ_1, λ_2, αντιστοίχως. Δείξτε ότι το $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$ είναι βάση του $\mathbb{C}^2$ και ο πίνακας ${}_{\mathcal{B}}L_{\mathcal{B}}$ είναι διαγώνιος.

   Όπως, προαναφέρεται και στην άσκηση 6, ο όρος «αυτομορφισμός» σημαίνει «ισομορφισμός, του οποίου το πεδίο ορισμού ταυτίζεται με το πεδίο τιμών».

10. Έστω A, B δύο $n \times n$ πίνακες μιγαδικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι τα γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{C}^n$ είναι ιδιοδιανύσματα και για τους δύο αυτούς πίνακες. Αποδείξτε ότι $AB = BA$.

    Συμβολίστε με $a_1, \ldots, a_n$ τις ιδιοτιμές του A, που αντιστοιχούν στα $v_1, \ldots, v_n$ και με $b_1, \ldots, b_n$ τις ιδιοτιμές του B, που αντιστοιχούν στα ίδια ιδιοδιανύσματα $v_1, \ldots, v_n$. Παρατηρήστε ότι το σύνολο $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι βάση του $\mathbb{C}^n$. Έστω L ο τελεστής του $\mathbb{C}^n$ που αντιστοιχεί στον πίνακα AB (δηλαδή, $L(x) = ABx$ για κάθε $x \in \mathbb{C}^n$) και M ο τελεστής του $\mathbb{C}^n$ που αντιστοιχεί στον πίνακα BA. Υπολογίστε τους πίνακες ${}_{\mathcal{B}}L_{\mathcal{B}}$, ${}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}}$ και δείξτε ότι είναι ίσοι. Από αυτό συμπεράνατε ότι $L = M$, άρα και $AB = BA$.

Quiz

1. Ένας $n \times n$ πίνακας A λέγεται *αντισυμμετρικός* αν $A^T = -A$. Ποια είναι η γενική μορφή ενός 3×3 αντισυμμετρικού πίνακα; Δείξτε ότι κάθε 3×3 αντισυμμετρικός πίνακας έχει το 0 ως ιδιοτιμή του. Δείξτε, επίσης, ότι ένας 3×3 πραγματικός αντισυμμετρικός πίνακας δεν έχει πραγματική ιδιοτιμή άλλη πλην του 0.

2. Αν ένας άνω τριγωνικός πίνακας A έχει όλα τα διαγώνια στοιχεία του 0, ποιές είναι οι ιδιοτιμές του;

3. Αν ένας άνω τριγωνικός πίνακας A έχει όλα τα διαγώνια στοιχεία του 1, ποιές είναι οι ιδιοτιμές του;