ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Εαρινό Εξάμηνο 2018

Διδάσκοντες: Π. Πάφιλος - Ν.Γ. Τζανάκης

Ασκήσεις για το εργαστήριο της Δευτέρας 5 Μαρτίου

1. Αν U, V, W είναι διανυσματικοί χώροι πάνω από σώμα K και $f : U \longrightarrow V$, $g : V \longrightarrow W$ είναι γραμμικές απεικονίσεις, αποδείξτε ότι $\mathrm{Ker}(f) \leq \mathrm{Ker}(g \circ f)$. (Υπενθυμίζεται ότι, γενικά, για διανυσματικούς χώρους X, Y, η σχέση $X \leq Y$ σημαίνει ότι ο X είναι υπόχωρος του Y.) Έστω K-διανυσματικός χώρος V και $f, g : V \longrightarrow V$ γραμμικές απεικονίσεις. Αποδείξτε ότι $\mathrm{Im}(g \circ f) \leq \mathrm{Im}(g)$.

2. Έστω η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ με $f(x, y, z) = (x + y + z, x - y - z)$. Υπολογίστε μία βάση για τον υπόχωρο $f^{-1}(V)$ του $\mathbb{R}^3$, όπου $V = \langle(1, 1)\rangle \subset \mathbb{R}^2$.

3. Βρείτε τον τύπο της γραμμικής απεικόνισης $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, αν ξέρετε ότι $f(1, 1) = (1, -1)$ και $f(1, 2) = (1, 3)$.

4. Έστω A ένας $m \times n$ πίνακας με $m < n$ και στοιχεία από ένα σώμα K και $f : K^n \longrightarrow K^m$ είναι η γραμμική απεικόνιση, που ορίζεται μέσω του A, δηλαδή, $f(x) = Ax$ για κάθε $x \in K^n$. Ποιά είναι η μέγιστη δυνατή διάσταση του $\mathrm{Im}(f)$ και ποιά η ελάχιστη δυνατή διάσταση του $\mathrm{Ker}(f)$;

5. Αποδείξτε ότι κάθε μη μηδενική γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ έχει τη μορφή $f(x, y, z) = ax + by + cz$ για κάποια σταθερά a, b, c, που δεν είναι όλα 0. Υπολογίστε μία βάση του $\mathrm{Ker}(f)$.

6. Αν W_1, W_2 είναι υπόχωροι του διανυσματικού χώρου V και $V = W_1 \oplus W_2$, τότε, όπως ξέρουμε από τη θεωρία, κάθε διάνυσμα $v \in V$ γράφεται με μοναδικό τρόπο σαν άθροισμα $v = w_1 + w_2$, με $w_1 \in W_1$ και $w_2 \in W_2$. Συνεπώς, μπορούμε να ορίσουμε τις απεικονίσεις $\pi_1 : V \longrightarrow W_1$ και $\pi_2 : V \longrightarrow W_2$ ως εξής: $\pi_1(v) = w_1$ και $\pi_2(v) = w_2$.
   (α΄) Αποδείξτε ότι οι π_1, π_2 είναι γραμμικές.
   (β΄) Αποδείξτε ότι $\pi_1^2 = \pi_1$ και $\pi_2^2 = \pi_2$. (π_i^2 σημαίνει $\pi_i \circ \pi_i$.)
   (γ΄) Προσδιορίστε τους υποχώρους $\mathrm{Ker}(\pi_1)$, $\mathrm{Ker}(\pi_2)$, $\mathrm{Im}(\pi_1)$, $\mathrm{Im}(\pi_2)$.
   (δ΄) Προσδιορίστε τις γραμμικές απεικονίσεις $\pi_1 \circ \pi_2$ και $\pi_2 \circ \pi_1$.

7. Έστω ότι V, W είναι δύο διανυσματικοί χώροι πάνω από ένα σώμα K.
   (α΄) Αποδείξτε ότι δύο γραμμικές απεικονίσεις $f, g : V \longrightarrow W$ είναι ίσες, αν και μόνο αν, η απεικόνιση $f - g$ είναι η μηδενική απεικόνιση.

(β′) Έστω $\dim V = n$ και $v_1, \ldots, v_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του V. Έστω, ακόμη, ότι για τη γραμμική απεικόνιση $h : V \longrightarrow W$ ισχύει $h(v_i) = 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Αποδείξτε ότι h είναι η μηδενική απεικόνιση. Βάσει του (α′) συμπεράνατε ότι, αν $f, g : V \longrightarrow W$ είναι γραμμικές απεικονίσεις και $f(v_i) = g(v_i)$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$, τότε $f = g$, δηλαδή, $f(v) = g(v)$ για κάθε $v \in V$.

(γ′) Κάθε υποσύνολο του V της μορφής $L = v_1 + \langle v_2 \rangle = \{v_1 + \lambda v_2 : \lambda \in K\}$, όπου $v_2 \neq 0$, το λέμε ευθεία του V (το L δεν είναι, κατ' ανάγκη, υπόχωρος του V). Αποδείξτε ότι $0 \notin L$ (σε πιο παραστατική γλώσσα, η ευθεία L δεν περνά από το 0) αν και μόνο αν τα v_1, v_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Ύστερα, βασιστείτε στο (β′) και αποδείξτε το εξής: Αν $\dim V = 2$ (π.χ. $V = \mathbb{R}^2$) και $f, g : V \longrightarrow W$ είναι γραμμικές απεικονίσεις και οι τιμές τους συμπίπτουν σε όλα τα σημεία μιας ευθείας L, η οποία δεν περνά από το 0, τότε $f = g$, δηλαδή, οι τιμές τους συμπίπτουν σε όλα τα $v \in V$.

(δ′) Κάθε υποσύνολο του V της μορφής $P = v_1 + \langle v_2, v_3 \rangle = \{v_1 + \lambda v_2 + \mu v_3 : \lambda, \mu \in K\}$, όπου v_2, v_3 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, το λέμε (δισδιάστατο) επίπεδο του V (το P δεν είναι, κατ' ανάγκη, υπόχωρος του V). Αποδείξτε ότι $0 \notin P$ (σε πιο παραστατική γλώσσα, το επίπεδο P δεν περνά από το 0) αν και μόνο αν τα v_1, v_2, v_3 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Ύστερα, βασιστείτε στο (β′) και αποδείξτε το εξής: Αν Αν $\dim V = 3$ (π.χ. $V = \mathbb{R}^3$) και $f, g : V \longrightarrow W$ είναι γραμμικές απεικονίσεις και οι τιμές τους συμπίπτουν σε όλα τα σημεία ενός επιπέδου P, το οποίο δεν περνά από το 0, τότε $f = g$, δηλαδή, οι τιμές τους συμπίπτουν σε όλα τα $v \in V$.

8. Η άσκηση αυτή δεν αναφέρεται άμεσα σε Γραμμική Άλγεβρα. Είναι για να εξασκηθείτε στις αντίστροφες εικόνες.

   Έστω A, B, C μη κενά σύνολα (όχι κατ' ανάγκη διανυσματικοί χώροι) και απεικονίσεις $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$. Αποδείξτε ότι, για κάθε $\emptyset \neq S \subseteq C$ ισχύει $f\Big((g \circ f)^{-1}(S)\Big) \subseteq g^{-1}(S)$.