ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Εαρινό Εξάμηνο 2018

Διδάσκοντες: Π. Πάφιλος - Ν.Γ. Τζανάκης

Ασκήσεις για το εργαστήριο της Τετάρτης 28 Φεβρουαρίου

1. Εξετάστε ποιες από τις παρακάτω απεικονίσεις είναι γραμμικές:

$$\begin{array}{lll} f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, & f(x,y) = \alpha x + \beta y & \text{με } \alpha,\beta \in \mathbb{R} \text{ σταθερές,} \\ g:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, & g(x,y,z) = (\alpha(x+y+z), x) & \text{με } \alpha \in \mathbb{R} \text{ σταθερά,} \\ h:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, & h(x,y,z) = \alpha(z,x,y) - \beta(y,z,x) & \text{με } \alpha,\beta \in \mathbb{R} \text{ σταθερές,} \\ k:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, & k(x,y,z) = (x+y)u - zv & \text{με } u,v \in \mathbb{R}^3 \text{ σταθερά διανύσματα,} \end{array}$$

2. Βρείτε μια γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, της οποίας η εικόνα $\mathrm{Im}(f) = \langle(1,-1,2)\rangle$.
   Ανάλογα, βρείτε γραμμική απεικόνιση $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, της οποίας η εικόνα $\mathrm{Im}(g) = \langle(0,2,1),(-1,0,1)\rangle$.
   Σημείωση. Υπάρχουν πολλές τέτοιες f και g με τις παραπάνω ιδιότητες.

3. Βρείτε μια γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, της οποίας ο πυρήνας $\mathrm{Ker}(f) = \langle(1,-1,2)\rangle$.
   Ανάλογα, βρείτε γραμμική απεικόνιση $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, της οποίας ο πυρήνας $\mathrm{Ker}(g) = \langle(0,2,1),(-1,0,1)\rangle$.
   Σημείωση. Υπάρχουν πολλές τέτοιες f και g με τις παραπάνω ιδιότητες.

4. Υπολογίστε βάσεις για τον πυρήνα $\mathrm{Ker}(f)$ και την εικόνα $\mathrm{Im}(f)$ της γραμμικής απεικόνισης $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, που ορίζεται από τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Δηλαδή, η f ορίζεται από τη σχέση $f(x) = Ax$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^3$ (βλέπουμε το x ως στήλη 3×1).

5. Θεωρήστε ξανά τη γραμμική απεικόνιση f της ασκήσεως 4 και τον υπόχωρο $V = \langle(1,1,1)\rangle$ του $\mathbb{R}^3$.
   (α′) Ποια είναι η γεωμετρική σημασία του V;
   (β′) Δείτε τον V ως υπόχωρο του πεδίου τιμών της f. Σύμφωνα με τη θεωρία, η αντίστροφη εικόνα του V, αυτή που συμβολίζουμε $f^{-1}(V)$ είναι ένας υπόχωρος U του πεδίου ορισμού της f. Υπολογίστε μία βάση για τον U. Ποια είναι η γεωμετρική σημασία του U;