ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Εαρινό Εξάμηνο 2018

Διδάσκοντες: Π. Πάφιλος - Ν.Γ. Τζανάκης

Ασκήσεις της εβδομάδας 19 - 23 Φεβρουαρίου

1. Σ' αυτή την άσκηση να βλέπετε τα διανύσματα ως στήλες. Στα ερωτήματα (α′) και (γ′), στα οποία εμφανίζονται τα διανύσματα $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$, ο $m \times n$ πίνακας A είναι αυτός που σχηματίζεται από τις στήλες $a_1, \dots, a_n$.
   (α′) Έστω ότι $b, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$. Δείτε αυτά τα διανύσματα ως στήλες και δείξτε ότι, το να είναι το b γραμμικός συνδυασμός των $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$, ισοδυναμεί με το να έχει λύση το σύστημα $AX = b$.
   (β′) Εξετάστε αν το $(0, 0, 0, 1)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $(1, 2, 3, 3), (1, 2, 0, 3), (1, 1, 1, 2)$.
   (γ′) Δείξτε ότι, το να είναι τα διανύσματα $a_1, \dots, a_n$ γραμμικώς εξαρτημένα, ισοδυναμεί με το να έχει το σύστημα $AX = 0$ *μη μηδενική* λύση. Θυμηθήτε ότι, η τελευταία συνθήκη ισοδυναμεί με το ότι $r(A) < n$, όπου $r(A)$ είναι η *τάξη* του A.

2. Έστω ότι $v_1, \dots, v_n$ διανύσματα του K-διανυσματικού χώρου V. Δείξε ότι:
   (α′) $\langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle = \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_i + v_1, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle$,
   (β′) Αν λ είναι οποιοδήποτε μη μηδενικό στοιχείο του K, τότε
   $$\langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle = \langle v_1, \dots, v_{i-1}, \lambda \cdot v_i, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle.$$

3. Έστω V ένας K-διανυσματικός χώρος και v_1, v_2, v_3, v_4 οποιαδήποτε διανύσματα του V. Εξετάστε αν το σύνολο $\{v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, v_4 - v_1\}$ είναι εξαρτημένο ή ανεξάρτητο.

4. Βρείτε αντιπαράδειγμα στον επόμενο ισχυρισμό: «Εάν $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^4$ και ο W είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ με $\dim(W) < 4$, τότε κάποια από αυτά αποτελούν βάση του W.»

5. Δείξε ότι αν οποιοδήποτε διαγώνιο στοιχείο του επόμενου πίνακα γίνει μηδέν, τότε οι γραμμές του είναι εξαρτημένα διανύσματα. $T = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$

6. Βρείτε μια βάση του χώρου των γραμμών για καθέναν από τους πίνακες
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ανάλογο ερώτημα και για τους χώρους των στηλών.

7. Έστω $K = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ και $M_{2\times2}(K)$ ο K-διανυσματικός χώρος όλων των 2×2 πινάκων με στοιχεία από το K. Αν V είναι ο υπόχωρος, που αποτελείται από τους συμμετρικούς πίνακες του $M_{2\times2}(K)$, αποδείξτε ότι το σύνολο

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

είναι βάση του V.

8. Έστω $C^0(\mathbb{R})$ ο $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων.
(α΄) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έστω η συνάρτηση $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = x^n$. Αποδείξτε ότι το σύνολο $\{f_n : n = 1, 2, \ldots\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την αλγεβρική πρόταση ότι *ένα μη μηδενικό πολυώνυμο δεν μπορεί να μηδενίζεται για περισσότερες από τον βαθμό του διαφορετικές τιμές*.
(β΄) Αποδείξτε ὅτι διανυσματικός χώρος $C^0(\mathbb{R})$ δεν έχει πεπερασμένη βάση.
(γ΄) Αποδείξτε ὅτι διανυσματικός χώρος $C^0(\mathbb{R})$ δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενος.

9. Έστω ο $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^\infty$ όλων των πραγματικών ακολουθιών. Για κάθε $i = 1, 2, 3, \ldots$, έστω e_i η ακολουθία της οποίας ο i-οστός όρος είναι 1 και όλοι οι υπόλοιποι όροι είναι 0, δηλαδή $e_1 = (1, 0, 0, 0, \ldots)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0, \ldots)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0, \ldots)$ κοκ. Απόδειξε ότι το σύνολο $\{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο, αλλά δεν αποτελεί βάση.

10. Έστω K-διανυσματικός χώρος V και $S \subseteq T \subseteq V$. Αποδείξτε τα εξής:
(α΄) Αν και το S είναι γραμμικώς εξαρτημένο, τότε και το T είναι γραμμικώς εξαρτημένο.
(β΄) Αν και το T είναι γραμμικώς ανεξάρτητο, τότε και το S είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

11. Έστω μη μηδενικός K-διανυσματικός χώρος V, με την εξής ιδιότητα: Υπάρχει θετικός ακέραιος m, τέτοιος ώστε, κάθε υποσύνολο του V με πληθάριθμο m είναι γραμμικώς εξαρτημένο. Αποδείξτε ότι ο V έχει βάση με πληθάριθμο $< m$.
Υπόδειξη: Θυμηθήτε! Κάθε διανυσματικός χώρος έχει βάση.