

MEM 204 ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 1

Άσκηση 1.1 Αποδείξτε ότι τα σύνολα $\{d : 1 \leq d \leq n \text{ και } d|n\}$ και $\{\frac{n}{d} : 1 \leq d \leq n \text{ και } d|n\}$ είναι ίσα.

Άσκηση 1.2 Αποδείξτε τα παρακάτω:

α'. Το τετράγωνο ενός περιττού αριθμού είναι περιττός, ενώ το τετράγωνο ενός άρτιου είναι άρτιος.

β'. Σε διαίρεση με το 4, το τετράγωνο ενός περιττού αφήνει υπόλοιπο 1, ενώ το τετράγωνο ενός άρτιου αφήνει υπόλοιπο 0.

γ'. Εάν m είναι φυσικός αριθμός, δείξτε ότι ο αριθμός $n = 4m + 3$ δεν είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού.

Άσκηση 1.3 Εάν $n, b \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, δείξτε ότι $(a, ab + n)|n$.

Άσκηση 1.4 Υπολογίστε τους παρακάτω μέγιστους κοινούς διαιρέτες: (396, 247), (627, 312), (1320, 143). Σε κάθε περίπτωση, γράψτε το μέγιστο κοινό διαιρέτη που υπολογίσατε ως ακέραιο γραμμικό συνδυασμό των δύο ακεραίων.

Άσκηση 1.5 Έστω $a, b \in \mathbb{Z}$, όχι και οι δύο ίσοι με μηδέν. Δείξτε τα παρακάτω:

α'. Εάν $(a, b) = 1$ τότε $(ab, a + b) = 1$.

β'. Εάν $(a, b) = 1$ τότε $(a + b, a^2 + b^2) = 1$ ή 2.

γ'. $(7a + 2, 4a + 1) = 1$.

Άσκηση 1.6 Υπολογίστε το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των 306 και 657.

Άσκηση 1.7 Έστω $a, b \in \mathbb{Z}$, όχι και οι δύο ίσοι με μηδέν.

α'. Δείξτε ότι $(a, b) = |a|$ αν και μόνο αν $|a||b$. Αντίστοιχα, $(a, b) = |b|$ αν και μόνο αν $|b||a$.

β'. Δείξτε ότι $(a, b) = [a, b]$ αν και μόνο αν $a = \pm b$.

Άσκηση 1.8 Έστω $a > 1$ φυσικός αριθμός και $n, m \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $a^m - 1|a^n - 1$ αν και μόνο αν $m|n$.