

## ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Εαρινό Εξάμηνο 2018

Διδάσκοντες: Π. Πάφιος - Ν.Γ. Τζανάκης

### Ασκήσεις της εβδομάδας 12 - 16 Φεβρουαρίου

1. Ποια από τα παρακάτω υποσύνολα του  $\mathbb{R}^3$  είναι διανυσματικοί υπόχωροι του  $\mathbb{R}^3$ ; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.
  - (α') Το σύνολο των διανυσμάτων, με μηδενική πρώτη συντεταγμένη.
  - (β') Το σύνολο των διανυσμάτων, με πρώτη συντεταγμένη =1.
  - (γ') Το σύνολο των διανυσμάτων,  $(x_1, x_2, x_3)$  με  $x_1 x_2 = 0$ .
  - (δ') Το σύνολο, που αποτελείται μόνο από το μηδενικό διάνυσμα.
  - (ε') Το σύνολο  $\{a(1, 1, 0) + b(2, 0, 1) : a, b \in \mathbb{R}\}$
  - (ς') Το σύνολο των διανυσμάτων  $(x_1, x_2, x_3)$  που ικανοποιούν τη σχέση  $x_3 - x_2 + 3x_1 = 0$ .
2. Αποδείξτε ότι το  $\mathbb{C}$ , με τις πράξεις της πρόσθεσης μιγαδικών, καθώς και του πολλαπλασιασμού πραγματικού αριθμού επί μιγαδικό, είναι  $\mathbb{R}$ -διανυσματικός χώρος.
3. Αποδείξτε ότι το  $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ , με τις πράξεις της πρόσθεσης πραγματικών αριθμών, καθώς και πολλαπλασιασμού ρητού επί πραγματικό, είναι  $\mathbb{Q}$ -διανυσματικός χώρος.
4. Ποιά υποσύνολα του  $\mathbb{R}^2$  παριστάνουν ο χώρος γραμμών και ο μηδενόχωρος των παρακάτω πινάκων;
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
5. Έστω  $\Pi$  το επίπεδο του τρισδιάστατου χώρου με εξίσωση  $x + 2y + z = 6$ . Ποια είναι η εξίσωση του επιπέδου  $\Pi_0$ , που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι παράλληλο προς το  $\Pi$ ; Για καθένα από τα  $\Pi$  και  $\Pi_0$  εξετάστε αν είναι διανυσματικός υπόχωρος του  $\mathbb{R}^3$ .
6. Δείξτε ότι το σύνολο  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  των  $m \times n$  πραγματικών πινάκων, εφοδιασμένο με την πρόσθεση πινάκων και τον πολλαπλασιασμό αριθμού επί πίνακα, είναι  $\mathbb{R}$ -διανυσματικός χώρος.
7. Δείξτε ότι το σύνολο των μη ιδιόμορφων  $2 \times 2$  πινάκων πραγματικών αριθμών δεν είναι υπόχωρος του διανυσματικού χώρου  $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  (βλ. προηγούμενη άσκηση). Δείξτε, επίσης, ότι ούτε το σύνολο των ιδιόμορφων  $2 \times 2$  πινάκων πραγματικών αριθμών είναι υπόχωρος του  $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ .

8. Δείξτε ότι το σύνολο  $C^0$  των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων του  $\mathbb{R}$  στον εαυτό του, εφοδιασμένο με τις πράξεις, που ορίσαμε στο μάθημα, είναι  $\mathbb{R}$ -διανυσματικός χώρος. Επίσης, δείξτε ότι το σύνολο  $C^1$  των παραγωγίσιμων πραγματικών συναρτήσεων του  $\mathbb{R}$  στον εαυτό του, εφοδιασμένο με τις ίδιες πράξεις, είναι  $\mathbb{R}$ -διανυσματικός χώρος, που περιέχεται στον προηγούμενο.
9. Αποδείξτε ότι το σύνολο  $\mathbb{R}^\infty$  των ακολουθιών πραγματικών αριθμών, εφοδιασμένο με τις πράξεις της πρόσθεσης ακολουθιών

$$(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) + (b_1, b_2, \dots, b_n, \dots) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n, \dots)$$

και πολλαπλασιασμού ακολουθίας επί πραγματικό αριθμό

$$k(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) = (ka_1, ka_2, \dots, ka_n, \dots)$$

είναι  $\mathbb{R}$ -διανυσματικός χώρος. Δείξτε, επίσης, ότι το υποσύνολο του  $\mathbb{R}^\infty$ , που αποτελείται από τις μηδενικές ακολουθίες, είναι υπόχωρος του  $\mathbb{R}^\infty$ .

## Quiz

*Σε κάποιες από τις παρακάτω ερωτήσεις, όταν αναφερόμαστε σε ένα υποσύνολο  $S$  του  $\mathbb{R}^2$  ή του  $\mathbb{R}^3$ , το θεωρούμε ως το σύνολο των ελεύθερων διανυσμάτων με αρχή την αρχή των αξόνων και πέρας κάποιο σημείο του  $S$ .*

1. Στο επίπεδο, το ημιεπίπεδο πάνω από τον άξονα των  $x$  είναι υπόχωρος του  $\mathbb{R}^2$ ;
2. Ο ημίχωρος του τρισδιάστατου χώρου, που είναι πάνω από το επίπεδο  $xOy$ , είναι υπόχωρος του  $\mathbb{R}^3$ ;
3. Στο επίπεδο, ο κύκλος κέντρου  $(0, 0)$  και ακτίνας 1, είναι υπόχωρος του  $\mathbb{R}^2$ ;
4. Στο επίπεδο, το εσωτερικό του κύκλου κέντρου  $(0, 0)$  και ακτίνας 1, είναι υπόχωρος του  $\mathbb{R}^2$ ;
5. Το  $\mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$  είναι υπόχωρος του  $\mathbb{R}^n$ ;
6. Πότε μία ευθεία του  $\mathbb{R}^2$  είναι  $\mathbb{R}$ -διανυσματικός χώρος;
7. Πότε ένα επίπεδο του  $\mathbb{R}^3$  είναι  $\mathbb{R}$ -διανυσματικός χώρος;
8. Μπορεί ένα πεπερασμένο σύνολο να είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το  $\mathbb{R}$  ή πάνω από το  $\mathbb{C}$ ;