Άλγεβρα ΙΙ (Μεταπτυχιακό)

Φυλλάδιο 11

Παράδοση 19/12/2017

Άσκηση 1. Είναι η γωνία $\frac{\pi}{5}$ κατασκευάσιμη με κανόνα και διαβήτη; Μπορεί να διαιρεθεί (με κανόνα και διαβήτη και πάλι) σε εφτά ίσα μέρη;

Άσκηση 2. Να δώσετε ένα παράδειγμα επέκτασης της μορφής $\mathbb{Q}(a) \leq \mathbb{R}$ με $[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{R}] = 4$ τέτοια ώστε το a να μην είναι κατασκευάσιμο με κανόνα και διαβήτη.

Άσκηση 3. Να αποδείξετε ότι η ομάδα Galois της επέκτασης $\mathbb{Q}(\omega, \sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$ είναι επιλύσιμη.

Άσκηση 4. Δίδονται τα πολυώνυμα

$$f(X) = X^2 + 2X + 6, \;\; g(X) = X^3 - 2 \text{ και } h(X) = X^4 - 2X^2 - 1.$$

Να βρείτε μια αύξουσα αλυσίδα σωμάτων η οποία να μας δίνει τα σώματα ανάλυσης, έστω L, των $f(X)$, $g(X)$ και $h(X)$ υπεράνω του $\mathbb{Q}$ σαν ριζικές επεκτάσεις του $\mathbb{Q}$.

Άσκηση 5. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $f(X) = 4X^5 - 10X^4 + 5 \in \mathbb{Q}[X]$ δεν είναι επιλύσιμο με ριζικά.

Άσκηση 6. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $f(X) = X^5 - 35X^4 + 7 \in \mathbb{Q}[X]$ δεν είναι επιλύσιμο με ριζικά.

Άσκηση 7. Να εφαρμόσετε το κριτήριο Kaplansky και να υπολογίσετε τις ομάδες Galois, ως προς το $\mathbb{Q}$, των παρακάτω πολυωνύμων:

(α′) $f_1(X) = X^4 + 4X + 2$,

(β′) $f_2(X) = X^4 - 8X + 12$,

(γ′) $f_3(X) = X^4 - X^2 + 1$,

(δ′) $f_4(X) = X^4 - 4X^2 + 2$ και

(ε′) $f_5(X) = X^4 + 2$.

Άσκηση 8. Αν $p \in \mathbb{P}$, $p \geq 5$, να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο

$$f(X) = (X^2 + 1)X(X - 1) \cdots (X - (p - 3)) + 1 \in \mathbb{Z}[X]$$

είναι ανάγωγο στον $\mathbb{Q}[X]$. Είναι η εξίσωση $f(X) = 0$ επιλύσιμη με ριζικά;

Άσκηση 9.

(α′) Αν σ αυτομορφισμός ενός σώματος K και ισχύουν

$$\sigma^4 = \mathrm{Id}_K \text{ και } \sigma(\alpha) + \sigma^3(\alpha) = \alpha + \sigma^2(\alpha) \text{ για κάθε } \alpha \in K,$$

να αποδείξετε ότι $\sigma^2 = 1$.

(β′) Αν $p \in \mathbb{P}$ και $a, b \in \mathbb{Q}$ τέτοιο ώστε $a^2 - pb^2 = 1$, να αποδείξετε ότι υπάρχουν ρητοί $s, t \in \mathbb{Q}$ τέτοιοι ώστε

$$a = \frac{s^2 + pd^2}{s^2 - pd^2} \text{ και } b = \frac{2st}{s^2 - pd^2}.$$

Άσκηση 10. Να αποδείξετε ότι οι ρητές λύσεις $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ της εξίσωσης

$$X^2 - XY + Y^2 = 1$$

δίνονται από τις σχέσεις

$$\alpha = \frac{m^2 - 2mn}{m^2 - mn + n^2} \text{ και } \beta = \frac{n^2 - 2mn}{m^2 - mn + n^2}$$

όπου $m, n \in \mathbb{Z}$ και είναι πρώτοι μεταξύ τους.

Άσκηση 11. Να βρείτε την ομάδα Galois του πολυωνύμου $f(X) = X^4 + 3 \in \mathbb{Q}[X]$ ως προς το $\mathbb{Q}$. Στη συνέχεια, αν L είναι το σώμα ανάλυσης του $f(X)$ ως προς το $\mathbb{Q}$ να βρείτε όλα τα ενδιάμεσα σώματα $F \leq L$ για τα οποία η $F/\mathbb{Q}$ είναι Galois.

Άσκηση 12. Δίνεται το πολυώνυμο $f(X) = X^5 + aX + b \in \mathbb{Q}[X]$. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{Gal}(f(X)/\mathbb{Q}) \cong D_5$ (D_5: η δίεδρη ομάδα με 10 στοιχεία) τότε και μόνο τότε όταν:

(α′) Το $f(X)$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Q}[X]$.

(β′) Η διακρίνουσα του $f(X)$, $D(f) := 4^4a^5 + 5^5b^4$ είναι τέλειο τετράγωνο.

(γ′) Η εξίσωση $f(X) = 0$ είναι επιλύσιμη με ριζικά.

Υπόδειξη: Δες άσκηση 6, Basic Algebra I, Jacobson.