

Άλγεβρα II (Μεταπτυχιακό)

Φυλλάδιο 9

Παράδοση: 12/12/2017

**Άσκηση 1.** Να αποδειχθεί ότι αν  $n$  περιττός με  $n > 1$  τότε  $\Phi_{2n}(X) = \Phi_n(-X)$ .

**Άσκηση 2.** Να υπολογιστούν τα κυκλοτομικά πολυώνυμα  $\Phi_n(X)$  υπέρ το  $\mathbb{Q}$  για  $n = 1, 2, \dots, 12$  καθώς και το  $\Phi_{105}(X)$ .

**Άσκηση 3.** Αν  $K = \mathbb{Q}(\zeta_5)$ ,  $\zeta_5 := e^{\frac{2\pi i}{5}}$  να αποδείξετε ότι  $i \notin K$ .

**Άσκηση 4.** Να υπολογίσετε το  $\Phi_{14}(X)$  υπέρ το  $\mathbb{Q}$  και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι

$$\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2}.$$

**Άσκηση 5.** Πότε ισχύει  $\mathbb{Q}(\zeta_n) \cap \mathbb{Q}(\zeta_m) = \mathbb{Q}$ ;

**Άσκηση 6.** Να υπολογίσετε την διακρίνουσα του (ανάγωγου) πολυωνύμου

$$f(X) = X^4 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{Q}[X].$$

**Άσκηση 7.** Να υπολογισθεί η διακρίνουσα του  $n$ -οστού πολυωνύμου Taylor

$$f_n(X) = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \dots + \frac{X^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}$$

*Υπόδειξη: Πτυχιακή εργασία Ανθής Ζερβού.*

**Άσκηση 8.** Πόσους ανάγωγους παράγοντες έχει το πολυώνυμο  $X^{255} - 1 \in \mathbb{F}_2[X]$  και ποιοι είναι οι βαθμοί τους; Κάντε το ίδιο για το  $X^{255} - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ .

**Άσκηση 9.** Διατυπώστε και αποδείξετε το προσθετικό ανάλογο του θεωρήματος 90 του Hilbert.

**Άσκηση 10.** Να αποδείξετε ότι όλες οι ρητές λύσεις  $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$  της εξίσωσης  $X^2 + Y^2 = 1$  είναι της μορφής

$$a = \frac{s^2 - t^2}{s^2 + t^2}, \quad b = \frac{2st}{s^2 + t^2} \quad \text{με } s, t \in \mathbb{Q}.$$