ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ
Γιάννης Α. Αντωνιάδης

Ομάδες *Galois*, πεπερασμένα σώματα, κυκλοτομικές επεκτάσεις .
Ασκήσεις
Φυλλάδιο ένατο

1. Να βρείτε όλα τα υποσώματα του $\mathbb{Q}(\omega), \omega = e^{2\pi i/12}$.

2. Αν K σώμα με τέσσερα στοιχεία, να αποδείξετε ότι $K = \mathbb{F}_2(\alpha)$, όπου $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$.

3. Αν K σώμα, $chK \neq 2$ και $n \geq 1$ περιττός να αποδείξετε ότι αν το K περιέχει μια πρωταρχική $n-$ρίζα της μονάδας, θα περιέχει και μια πρωταρχική $2n-$ρίζα της μονάδας.

4. Ποιός είναι ο βαθμός της επέκτασης $[\mathbb{Q}(\zeta_{24}) : \mathbb{Q}]$; Ποιά είναι η ομάδα *Galois* της επέκτασης αυτής; Να αποδείξετε ότι $(cos(\pi/12) \in \mathbb{Q}(\zeta_{24})$ και να υπολογίσετε το ανάγωγο πολυώνυμο ως προς το $\mathbb{Q}$.

5. Υποθέτουμε ότι το πολυώνυμο $f(X) = X^3 + pX + q \in K[X]$ είναι ανάγωγο ως προς το πεπερασμένο σώμα K. Να αποδείξετε ότι $-4p^3 - 27q^2$ είναι τέλειο τετράγωνο στο K.

6. Να αποδείξετε ότι κάθε πεπερασμένη επέκταση του $\mathbb{Q}$ περιέχει πεπερασμένου πλήθους ρίζες της μονάδας.

7. Αν K, L επεκτάσεις του πεπερασμένου σώματος F βαθμού n και m αντίστοιχα να αποδείξετε ότι το KL έχει βαθμό το Ε.Κ.Π.(n, m) και το $K \cap L$ έχει βαθμό τον Μ.Κ.Δ.(n, m) ως προς το F.

8. Συμβολίζουμε με $\mathbb{Q}_m$ το σώμα $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ Αν $n \mid m$ να αποδείξετε ότι $\mathbb{Q}_n \leq \mathbb{Q}_m$. Να αποδείξετε ότι $\mathbb{Q}_n\mathbb{Q}_m = \mathbb{Q}_\ell$, όπου $\ell =$Ε.Κ.Π.(m, n). Να αποδείξετε ότι $\mathbb{Q}_n \cap \mathbb{Q}_m = \mathbb{Q}_d$, όπου $d :=$Μ.Κ.Δ.(n, m)

9. Ποιά είναι η ομάδα *Galois* του πολυωνύμου $f(X) = X^5 - 6X^4 + 3$ ως προς το σώμα K όταν (α) $K = \mathbb{Q}$ (β) $K = \mathbb{F}_2$. Σε κάθε περίπτωση, αν L είναι το σώμα ανάλυσης του $f(X)$ ως προς το K, πόσα ενδιάμεσα σώματα F, $K \leq F \leq L$ υπάρχουν τέτοια ώστε $[F : K] = 2$;

10. Έστω $f(X) \in K[X]$ διαχωρίσιμο και ανάγωγο πολυώνυμο τετάρτου βαθμού και α μια ρίζα του f. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει ενδιάμεσο σώμα στην επέκταση $K(\alpha)/K$ ακριβώς τότε όταν $G := Gal(f(X)/K)$ έιναι ισόμορφη με την A_4 ή την S_4.

Παράδοση την Παρασκευή 9 Δεκεμβρίου του 2005.