Άλγεβρα ΙΙ (Μεταπτυχιακό)

Φυλλάδιο 8

Παράδοση 28 Νοεμβρίου 2017

Άσκηση 1 Αν L/K πεπερασμένη επέκταση Galois, F ένα ενδιάμεσο σώμα και $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ να αποδείξετε ότι $\mathrm{Gal}(L/\sigma(F)) = \sigma \mathrm{Gal}(L/F)\sigma^{-1}$.

Άσκηση 2 Έστω L/K πεπερασμένη επέκταση Galois, $G := \mathrm{Gal}(L/K)$ και F_1, F_2 ενδιάμεσα σώματα της L/K. Αν $H_1 := \mathrm{Gal}(L/F_1)$ και $H_2 = \mathrm{Gal}(L/F_2)$, να αποδείξετε ότι $\mathrm{Gal}(L/F_1 \cap F_2) = H_1 \vee H_2$ και $\mathrm{Gal}(L/F_1 \vee F_2) = H_1 \cap H_2$.

Άσκηση 3 Έστω M/K επέκταση σωμάτων και L_1, L_2 ενδιάμεσα σώματα της M/K. Υποθέτουμε ότι οι επεκτάσεις L_1/K και L_2/K είναι επεκτάσεις Galois. Να αποδείξετε ότι:

(i) Η επέκταση L_1L_2/K είναι επέκταση Galois.

(ii) Η απεικόνιση $\phi : \mathrm{Gal}(L_1L_2/K) \to \mathrm{Gal}(L_1/K) \times \mathrm{Gal}(L_2/K)$ είναι μονομορφισμός ομάδων.

(iii) Αν $L_1 \cap L_2 = K$ τότε η ϕ είναι ισομορφισμός ομάδων.

Άσκηση 4 Αν $K := \mathbb{F}_p(X^p, Y^p)$ και $L = \mathbb{F}_p(X, Y)$ να αποδείξετε ότι η επέκταση L/K δεν είναι απλή.

Άσκηση 5 Έστω L το σώμα ανάλυσης του πολυωνύμου $f(X) := X^8 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$. Να υπολογισθεί η ομάδα Galois μέσω γεννητόρων και σχέσεων της επέκτασης $L/\mathbb{Q}$.