Άλγεβρα ΙΙ (Μεταπτυχιακό)

Φυλλάδιο 7

Παράδοση: Τρίτη 21 Νοεμβρίου 2017

Άσκηση 1 Να υπολογίσετε την ομάδα Galois του σώματος ανάλυσης του πολυωνύμου $X^3 - 10$ ως προς τα σώματα $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ και $\mathbb{Q}(i\sqrt{3})$ αντίστοιχα. Το ίδιο για το πολυώνυμο $X^3 - X - 1$ ως προς το σώμα $\mathbb{Q}(i\sqrt{23})$.

Άσκηση 2 Αν L/K επέκταση Galois βαθμού 8100, να αποδείξετε ότι υπάρχει ενδιάμεσο σώμα $F, K \leq F \leq L$ τέτοιο ώστε $[F : K] = 100$.

Άσκηση 3 Αν $K/\mathbb{Q}$ επέκταση Galois βαθμού $[K : \mathbb{Q}] = 3^n, n \geq 1$ να αποδείξετε ότι υπάρχει αλυσίδα σωμάτων $\mathbb{Q} = K_0 \leq K_1 \leq K_2 \leq ... \leq K_m = K$ τέτοια ώστε για κάθε $i \in \mathbb{N}_n$ να ισχύει $[K_{i+1} : K_i] = 3$.

Άσκηση 4 Έστω L/K επέκταση Galois και $[L : K] = n$. Αν $p \in \mathbb{P}, p \mid n$, τότε υπάρχει υπόσωμα F του L τέτοιο ώστε $[L : F] = p$.

Άσκηση 5 Αν L/K επέκταση Galois με $\mathrm{Gal}(N/K) \cong A_4$, να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει ενδιάμεσο σώμα $L, K \leq L \leq N$ τέτοιο ώστε $[L : K] = 2$.

Άσκηση 6 Έστω $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ και $L = K\left(\sqrt{(\sqrt{2}+2)(\sqrt{3}+3)}\right)$. Να αποδείξετε ότι η επέκταση $L/\mathbb{Q}$ είναι επέκταση Galois. Ποια είναι η ομάδα Galois της επέκτασης αυτής;

Άσκηση 7 Αν K σώμα χαρακτηριστικής $\mathrm{ch}K \neq 2$ και L/K επέκταση Galois με ομάδα Galois $\mathrm{Gal}(L/K) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ να αποδείξετε ότι $L = K(\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta})$ με $\alpha, \beta \in K$.

Άσκηση 8 Αν $f(X) = X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{Q}[X]$ ανάγωγο υπέρ το $\mathbb{Q}$ έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα, να αποδείξετε ότι $\mathrm{Gal}(f(X)/\mathbb{Q}) \cong S_3$.

Άσκηση 9 Αν $f(X) = X^3 - 3X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$, να αποδείξετε ότι είναι ανάγωγο ως προς το $\mathbb{Q}$ και να βρείτε την ομάδα Galois $\mathrm{Gal}(f(X)/\mathbb{Q})$.

Άσκηση 10 Έστω L/K επέκταση πεπερασμένη και διαχωρίσιμη και N η κανονική θήκη αυτής. Αν $G := \mathrm{Gal}(N/K), H := \mathrm{Gal}(N/L)$ (δηλαδή $L = \mathscr{F}(H)$) και η επέκταση L/K δεν είναι Galois, να βρείτε τη σχέση ανάμεσα στις ομάδες H και G. Υπόδειξη: Να αποδείξετε ότι αν $U \leq H \leq G$ τέτοια ώστε η U να είναι η μεγαλύτερη υποομάδα της H η οποία είναι κανονική υποομάδα της G, τότε

$$U = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}.$$