Άλγεβρα ΙΙ (Μεταπτυχιακό)

Φυλλάδιο 6

Παράδοση: Τρίτη 14 Νοεμβρίου 2017

Άσκηση 1 Ποιο είναι το σώμα ανάλυσης του πολυωνύμου $f(X) = X^2 + X + 1$ υπέρ το $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$;

Άσκηση 2 Ποιο είναι το σώμα ανάλυσης του πολυωνύμου
$f(X) = X^4 - 2X^3 - 5X^2 + 6X + 6$ υπέρ το $\mathbb{Q}$;

Άσκηση 3 Να εξετάσετε αν το πολυώνυμο $f(X) = X^3 + X + 1$ είναι διαχωρίσιμο υπέρ το $\mathbb{Q}$, το $\mathbb{R}$ και το $\mathbb{F}_2$.

Άσκηση 4 Για κάθε πρώτο p να δώσετε ένα παράδειγμα μιας μη διαχωρίσιμης επέκτασης ενός σώματος K με $\mathrm{ch}K = p$. Να ελέγξετε αν η επέκταση αυτή είναι κανονική.

Άσκηση 5 Να εξετάσετε αν οι παρακάτω επεκτάσεις είναι κανονικές:

$$(i)\ \mathbb{Q}(\sqrt[3]{7})/\mathbb{Q},\ \ (ii)\ \mathbb{Q}(\sqrt{1+\sqrt{7}})/\mathbb{Q},\ \ (iii)\ \mathbb{Q}(\sqrt{1+\sqrt{2}})/\mathbb{Q}$$

Άσκηση 6 Δώστε παραδείγματα επεκτάσεων σωμάτων L/K τέτοιων ώστε

(i) Η επέκταση να είναι κανονική αλλά όχι Galois.

(ii) Η επέκταση να είναι διαχωρίσιμη αλλά όχι Galois.

Άσκηση 7 Έστω L/K επέκταση Galois και $[L : K] = n$. Αν $p \in \mathbb{P}$, $p|n$, τότε υπάρχει υπόσωμα F του L τέτοιο ώστε $[L : F] = p$.

Άσκηση 8 Έστω $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Να υπολογίσετε το βαθμό και μια βάση της επέκτασης $K/\mathbb{Q}$, τους γεννήτορες της ομάδα Galois $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$, την ομάδα $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ (με όρους της Θεωρίας Ομάδων), να γράψετε τους συνδέσμους των υποσωμάτων του K και των υποομάδων της $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ καθώς και την αντιστοιχία τους.

Άσκηση 9 Να επαναλάβετε την προηγούμενη άσκηση για το σώμα $K = \mathbb{Q}(\omega, \sqrt[3]{10})$.

Άσκηση 10 Να υπολογίσετε τον βαθμό και μια βάση της επέκτασης $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})/\mathbb{Q}$. Να καταγράψετε όλες τις τετραγωνικές επεκτάσεις του $\mathbb{Q}$ που περιέχονται στην επέκταση αυτή.