

Άλγεβρα ΙΙ (Μεταπτυχιακό)

Φυλλάδιο 5

Παράδοση: Τρίτη 6 Νοεμβρίου 2017

**Άσκηση 1** Να βρείτε ένα σώμα ανάλυσης  $L$  του πολυωνύμου  $X^4 + 2X^2 - 2$  ως προς το σώμα  $\mathbb{Q}$  καθώς και τον βαθμό της επέκτασης  $[L : \mathbb{Q}]$ .

**Άσκηση 2** Είναι η επέκταση  $\mathbb{Q}(\sqrt{2 + \sqrt{2}})/\mathbb{Q}$  κανονική ή όχι;

**Άσκηση 3** Δώστε ένα παράδειγμα επεκτάσεων σωμάτων  $K \leq L \leq M$  στο οποίο οι επεκτάσεις  $M/L$  και  $L/K$  να είναι κανονικές, ενώ η επέκταση  $M/K$  όχι.

**Άσκηση 4** Να βρείτε τα σώματα ανάλυσης των πολυωνύμων  $f(X) = X^2 - 3 \in \mathbb{Q}[X]$  και  $g(X) = X^2 - 2X - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ .

**Άσκηση 5** Να βρείτε τα σώματα ανάλυσης των πολυωνύμων

$$f(X) = (X^2 - 3)(X^3 + 1) \in \mathbb{Q}[X]$$

και

$$g(X) = (X^2 - 2X - 2)(X^2 + 1) \in \mathbb{Q}[X].$$

Τι παρατηρείτε;

**Άσκηση 6** Να υπολογίσετε το σώμα ανάλυσης του πολυωνύμου  $X^4 - 7$  ως προς το σώμα  $\mathbb{Q}$ , καθώς και ως προς το σώμα  $\mathbb{F}_5$ .

**Άσκηση 7** Να βρείτε ένα σώμα ανάλυσης  $L$  του πολυωνύμου  $X^5 - 2$  ως προς το σώμα  $\mathbb{Q}$  καθώς και το βαθμό της επέκτασης  $[L : \mathbb{Q}]$ .

**Άσκηση 8** Να βρείτε ένα σώμα ανάλυσης των πολυωνύμων  $X^8 - 1$  και  $X^4 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ .

**Άσκηση 9** Να βρείτε το σώμα ανάλυσης  $L$  του  $f(X) = X^6 - 10X^4 + 31X^2 - 30 \in \mathbb{Q}[X]$  καθώς και τον βαθμό της επέκτασης  $[L : \mathbb{Q}]$ .

**Άσκηση 10** Αν  $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$  ανάγωγο πολυώνυμο περιττού βαθμού  $> 1$  το οποίο έχει ακριβώς ια πραγματική ρίζα  $\alpha \in \mathbb{R}$ , να αποδείξετε ότι η επέκταση  $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$  δεν είναι κανονική.