Άλγεβρα ΙΙ (Μεταπτυχιακό)

Φυλλάδιο 4

Παράδοση: 31 Οκτωβρίου 2017

Άσκηση 1. Δίνονται τα σώματα $L = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{3}+\sqrt[3]{3})$ και $M = \mathbb{Q}(\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1+i}{\sqrt{2}})$. Να υπολογιστούν οι βαθμοί $[L : \mathbb{Q}]$ και $[M : \mathbb{Q}]$.

Άσκηση 2. Αν α είναι ρίζα του πολυωνύμου $X^3 - 2X + 2 \in \mathbb{Q}[X]$ και $\beta = \alpha^2 - \alpha$ να αποδειχθεί ότι ισχύει $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\beta)$ και να βρεθεί το $\mathrm{Irr}(\beta, \mathbb{Q})$.

Άσκηση 3. (a) Στο σώμα $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ να γράψετε το στοιχείο $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$ ως γραμμικό $\mathbb{Q}-$ συνδυασμό των στοιχείων της βάσης.

(b) Στο σώμα $L = \mathbb{F}_2(\alpha)$, όπου $\alpha^4 + \alpha + 1 = 0$, να υπολογιστούν $a, b, c, d \in \mathbb{F}_2$ τέτοια ώστε $x = a + b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3$ όταν $x = \dfrac{1}{\alpha}, x = \alpha^5$ και $x = \dfrac{1}{\alpha^2+\alpha+1}$.

Άσκηση 4. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}) = \{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\}$. Επίσης ότι $\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_p) = \{\mathrm{Id}_{\mathbb{F}_p}\}, p \in \mathbb{P}$.
Τέλος, αν K σώμα χαρακτηριστικής p να αποδείξετε ότι η $\sigma : K \to K, x \mapsto x^p$ είναι $\mathbb{F}_p-$αυτομορφισμός του σώματος K.

Άσκηση 5. Έστω K ένα σώμα με $\mathrm{ch}K \neq 2$ και L μια επέκταση του K με $[L : K] = 2$. Να αποδείξετε ότι $L = K(\sqrt{a})$ για κάποιο $a \in K$. Συμπεράνετε ότι η επέκταση L/K είναι Galois.

Άσκηση 6. Να υπολογίσετε την ομάδα Galois των παρακάτω επεκτάσεων:

$$(i)\ \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}\quad (ii)\ \mathbb{F}_2(X)/\mathbb{F}_2(X^2)\quad (iii)\ \mathbb{F}_5(X)/\mathbb{F}_5(X^4)$$

Άσκηση 7. Αν $K = \mathbb{F}_2$ και $L = K(\alpha)$ όπου α μια ρίζα του $1 + X + X^2$ να αποδείξετε ότι η απεικόνιση $\sigma : L \to L$ η οποία δίνεται από τη σχέση $\sigma(a+b\alpha) = a+b+b\alpha$, όπου $a, b \in K$ είναι ένας $K-$αυτομορφισμός του L.

Άσκηση 8. Να αποδείξετε ότι οι μιγαδικοί αριθμοί $i\sqrt{3}$ και $1+i\sqrt{3}$ είναι ρίζες του πολυωνύμου $X^4-2X^3+7X^2-6X+12$. Έστω K το σώμα που παράγεται από τις ρίζες του πολυωνύμου αυτού, ως προς το σώμα $\mathbb{Q}$. Υπάρχει αυτομορφισμός σ του K τέτοιος ώστε $\sigma(i\sqrt{3}) = 1+i\sqrt{3}$;

Άσκηση 9. Να υπολογίσετε τον βαθμό και μία βάση των επεκτάσεων

$$(i)\ \mathbb{R}(X)/\mathbb{R}(X+\frac{1}{X}) \ \text{και}\ (ii)\ \mathbb{R}(X)/\mathbb{R}(X^2+\frac{1}{X^2})$$

Άσκηση 10. Έστω το σώμα $K(X), K$ σώμα. Να αποδείξετε ότι οι έξι αυτομορφισμοί

$$\phi_j : K(X) \to K(X),\ \ j=1,2,3,4,5,6 \ \text{όπου}$$

$$\phi_1(f(X)) = f(X),\ \ \phi_2(f(X)) = f(1-X),\ \ \phi_3(f(X)) = f(\frac{1}{X}),$$

$$\phi_4(f(X)) = f(\frac{X-1}{X}),\ \ \phi_5(f(X)) = f(\frac{1}{1-X}),\ \ \phi_6(f(X)) = f(\frac{X}{X-1}),$$

αποτελούν ομάδα ισόμορφη προς την S_3.