

ΑΛΓΕΒΡΑ II
(Μεταπτυχιακό)

Φυλλάδιο 3^ο,

Αγκ. 1^η (i) Έστω $\alpha = (1 + \sqrt{3})^{1/3}$. Να αποδείξετε
ότι ο α είναι αλγεβρικός αριθμός.
Να υπολογίσετε τους βαθμούς

$$[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] \text{ και } [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}(\sqrt{3})].$$

(ii) Αν τώρα $\beta = (10 + 6\sqrt{3})^{1/3}$ να αποδείξετε
ότι και ο β είναι αλγεβρικός αριθμός.
Να υπολογίσετε τους βαθμούς
 $[\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}]$ και $[\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}(\sqrt{3})]$.

Αγκ. 2^η Αν $p, q \in \mathbb{P}, p \neq q$, να αποδείξετε
ότι $\mathbb{Q}(\sqrt{p} + \sqrt{q}) = \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q})$.
Ποιο είναι το $\text{Irr}(\sqrt{p} + \sqrt{q}, \mathbb{Q})$;

Αγκ. 3^η Να αποδείξετε ότι $\frac{\mathbb{R}[X]}{\langle X^2 + 1 \rangle} \cong \mathbb{C}$

Αγκ. 4^η Να αποδείξετε ότι $\text{Aut}(\mathbb{Q}) = \{\text{Id}_{\mathbb{Q}}\}$

Αγκ. 5^η Έστω L/K επέκταση σώματων

Αν S υποδύνομο (άπειρο) του L , ορίσουμε

$$K(S) = \bigcup_{A \subseteq S} K(A). \text{ Να αποδείξετε ότι}$$

Απειρο

το $K(S)$ είναι σώμα και μάλιστα

το K με επέκταση το δύνομο S

Φυλλάδιο 3^ο, σελίδα 2^η

Ασκ. 6^η Αν L/K επέκταση σωμάτων και L_i ($i=1,2$) ενδιάμεσα σώματα

$$(δμ). \quad K \leq L_1 \leq L, \quad K \leq L_2 \leq L$$

τότε, (i) αν L_1/K αλγεβρική, να αποδείξετε ότι και η L_1L_2 είναι

(ii) αν L_1/K και L_2/K αλγεβρικές, L_2 αλγεβρική

να αποδείξετε ότι και η L_1L_2/K είναι αλγεβρική.

Ασκ. 7^η Έστω L/K επέκταση σωμάτων.

Αν $d \in L$ είναι αλγεβρικό υπέρ το $A(L)$ να αποδείξετε ότι $d \in A(L)$.

Ασκ. 8^η Να αποδείξετε ότι η επέκταση L/K είναι αλγεβρική $\Leftrightarrow L = K(S)$

όπου $S \subseteq L$ τ.ω. κάθε $d \in S$ είναι αλγ.

Ασκ. 9^η Έστω L/K επέκταση σωμάτων και $d \in L$ υπερβατικό υπέρ το K .
Να αποδείξετε ότι για κάθε $n \geq 1$

$$K(d^{n+1}) \neq K(d^n)$$

Ασκ. 10 Αν L_1/K και L_2/K πέπερ επεκτάσεις και $[L_1L_2:K] = [L_1:K][L_2:K]$, να αποδ. ότι $L_1 \cap L_2 = K$.
Να αποδείξετε και το αντίστροφο όταν $[L_1:K] = 2$ ή $[L_2:K] = 2$.