

Άσκηση 6

Άσκηση 6<sup>η</sup> Αν  $\alpha$  ρίζα του  $P(x) = x^3 - x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$

Να υπολογίσετε το αντίστροφο του  
βρωχείου  $1 - 2\alpha + 3\alpha^2$  στο  $\mathbb{Q}(\alpha)$

Άσκηση 7<sup>η</sup> Να αποδείξετε ότι, για  
κάθε πρώτο  $p$ , το πολυώνυμο  
$$P(x) = x^{p-2} + x^{p-3} + \dots + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$$
  
είναι ανάγωγο υπέρ το  $\mathbb{Q}$ .

Άσκηση 8<sup>η</sup> Αν  $\alpha$  ρίζα του ανάγωγου  
πολυωνύμου  $X^m - A \in K[X]$  και υποθέ-  
σουμε ότι  $m \nmid n$ , να αποδείξετε ότι  
ο βαθμός του  $\alpha^m$  υπέρ το  $K$  είναι  $\frac{n}{m}$ .  
Ποιό είναι το ανάγωγο πολυώνυμο του  
 $\alpha^m$  υπέρ το  $K$ ;

Άσκηση 9<sup>η</sup> Αν  $\alpha, \beta$  αλγεβρικά ως προς  
το σώμα  $K$ , βαθμών  $m$  και  $n$   
αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι  
το  $\alpha$  έχει βαθμό  $m$  ως προς το  
σώμα  $K(\beta)$  ακριβώς τότε όταν  
το  $\beta$  έχει βαθμό  $n$  ως προς το σώμα  
 $K(\alpha)$ . Μαζί με και τα δύο ισχύουν  
όταν  $(m, n) = 1$ .

Άσκηση 10<sup>η</sup> Έστω  $L/K$  επέκταση βαθύζων με  
 $[L:K] = 2^k$ . Αν  $f(x) \in K[x]$  με  
 $\deg f(x) = 3$  έχει μία ρίζα στο  $L$   
να αποδείξετε ότι έχει μία  
ρίζα στο  $K$ .