

Αλγεβρα II  
(Μεταπτυχιακό μάθημα)  
Άσκησης  
Φυλλάδιο 2°

Άσκηση 1<sup>η</sup>

Δίνεται το πολυώνυμο  $f(x) = x^3 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$   
Να αποδείξετε ότι είναι ανάγωγο υπέρ το  $\mathbb{Q}$ .  
Αν  $\alpha$  μία ρίζα αυτού, πόσο είναι  
ο βαθμός  $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = ?$

Άσκηση 2<sup>η</sup> Αν  $L = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$  να  
υπολογίσετε τον βαθμό της επέκτασης  
 $[L : \mathbb{Q}]$

Άσκηση 3<sup>η</sup>

Να αποδείξετε ότι

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$$

Για συνέχεια να συμπεράνετε ότι  
το πολυώνυμο  $x^4 - 10x^2 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$   
είναι ανάγωγο υπέρ το  $\mathbb{Q}$ .

Άσκηση 4<sup>η</sup> Να αποδείξετε ότι το  
σώμα  $\mathbb{Q}$ , είναι αριθμητικό.

Για συνέχεια να αποδείξετε  
ότι η επέκταση  $\mathbb{Q}/\mathbb{Q}$  είναι  
άπειρου βαθμού.

Άσκηση 5<sup>η</sup> Αν  $\alpha \in L/K$  και  $\alpha$  περιττού  
βαθμού ως προς το σώμα  $K$   
τότε να αποδείξετε ότι  
 $K(\alpha) = K(\alpha^2)$